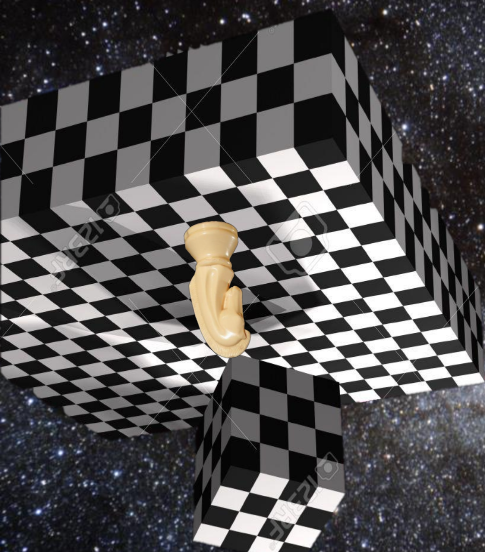
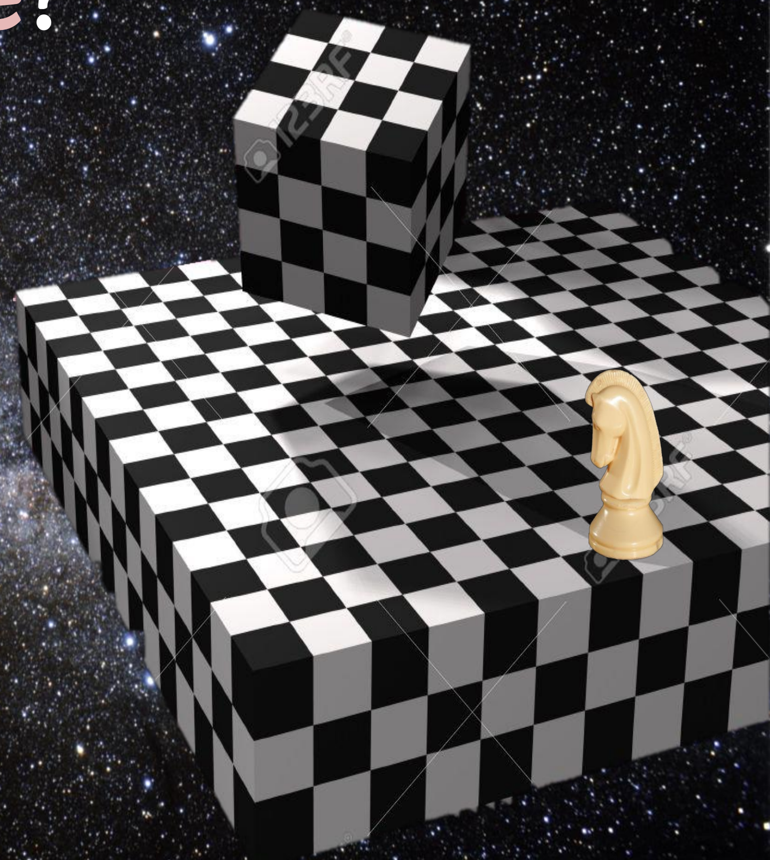
Which Chessboards have a Closed Knight's Tour within the Cube?

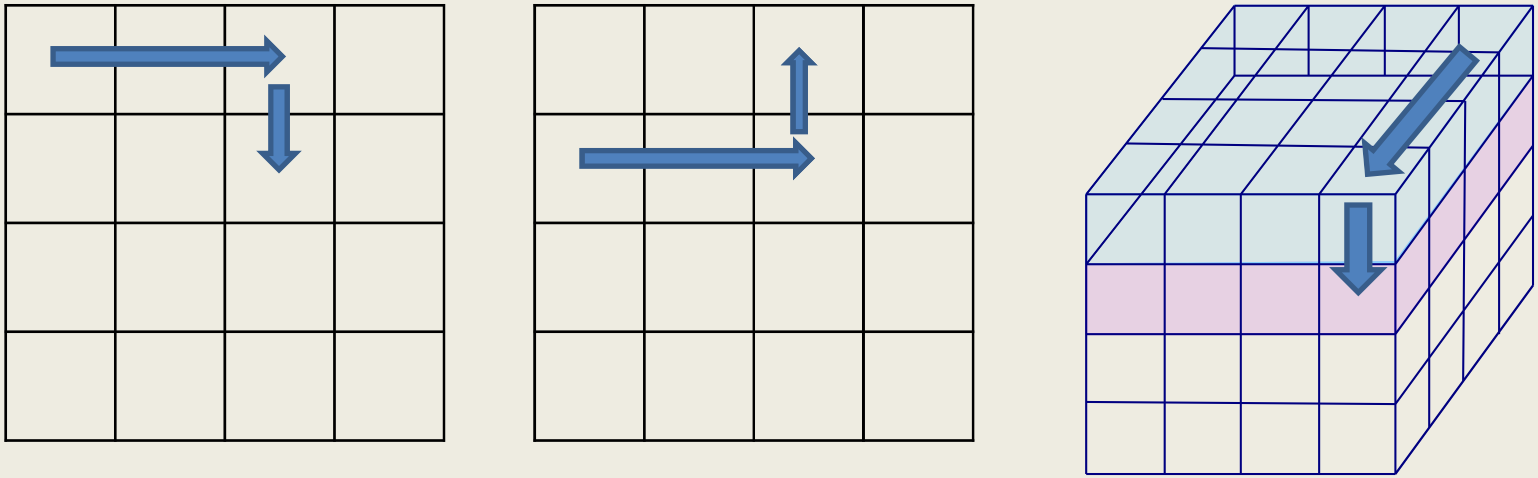
Joe DeMaio

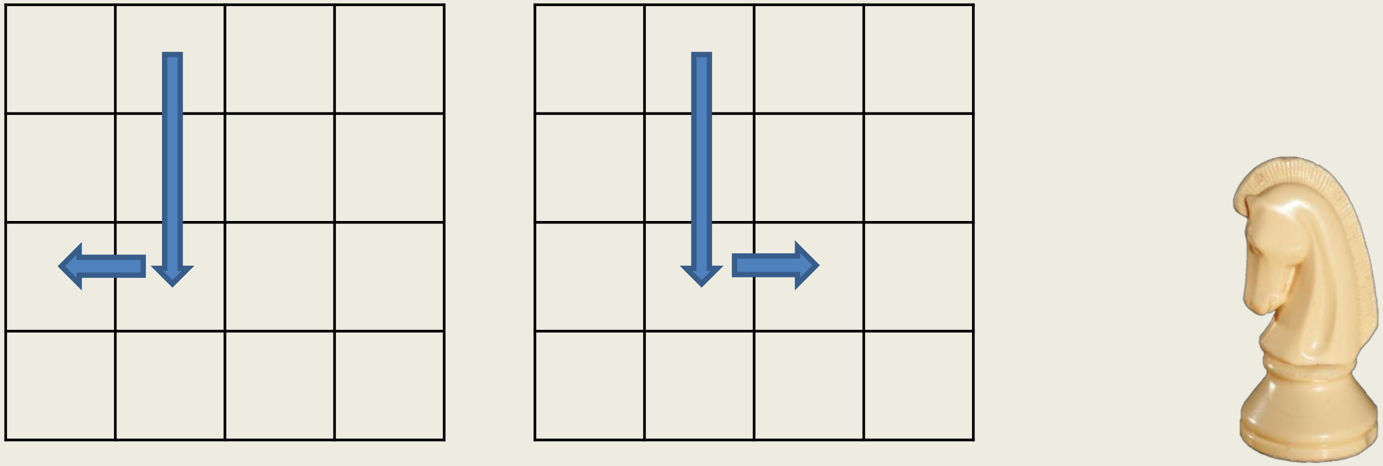




โดย นางสาว นวพรรณ วัฒนาวานิชกูล ม.6/8 เลขที่4

Legal move of the knight

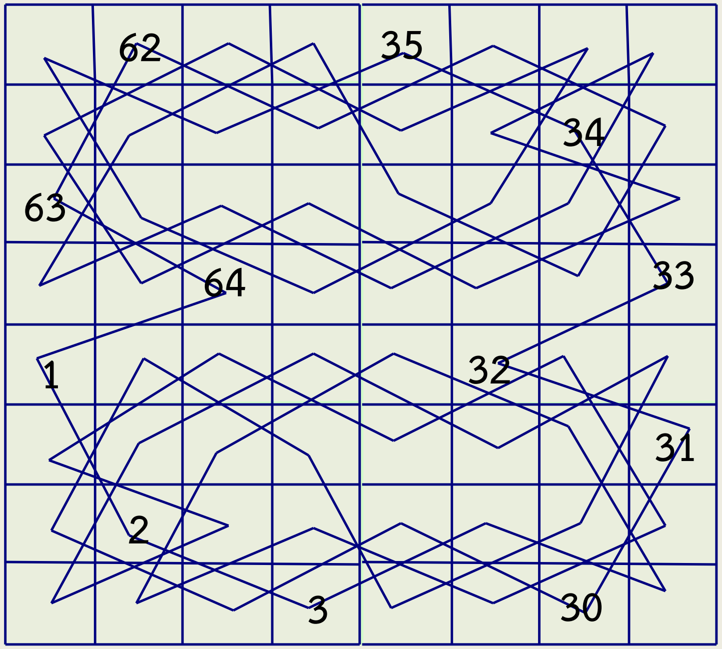




What is Knight’s Tour?

Knight’s Tour คือ การเดินของตัวม้าในตารางหมากรุกจากช่องหนึ่งไปยังอีกช่องโดยใช้ครบทั้งตาราง

ถ้าตัวม้ากลับมาที่เดิมด้วยจะเรียกว่าเป็น Closed Knight’s Tour

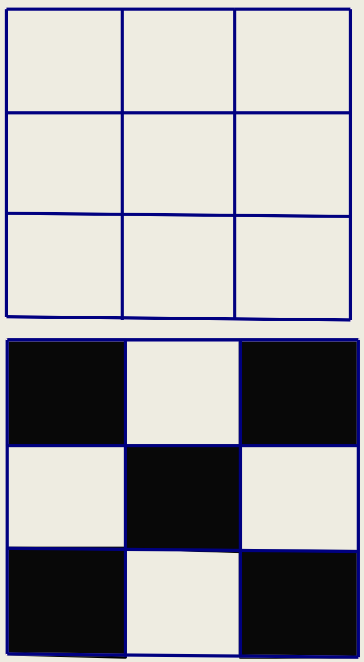


Graph theory

Hamiltonian cycle

Example for the Knight’s Tour Problem

ในตารางหมากรุกขนาด 3×3 สามารถหา closed knight’s tour ได้หรือไม่



พิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้มี closed knight’s tour

Coloring chessboard

ขาว-ดำ-ขาว-ดำ-ขาว-ดำ-

ขาว-ดำ-...-ขาว-ดำ(แล้วกลับไปช่องแรก)

จะได้ว่า จำนวนช่องสีขาวต้องมีจำนวนช่องเท่าช่องสีดำ

แต่มีช่องขาว 4 ช่อง ช่องดำ5 ช่อง

จึงหาclosed knight’s tour ไม่ได้ □

Schwenk's Theorem

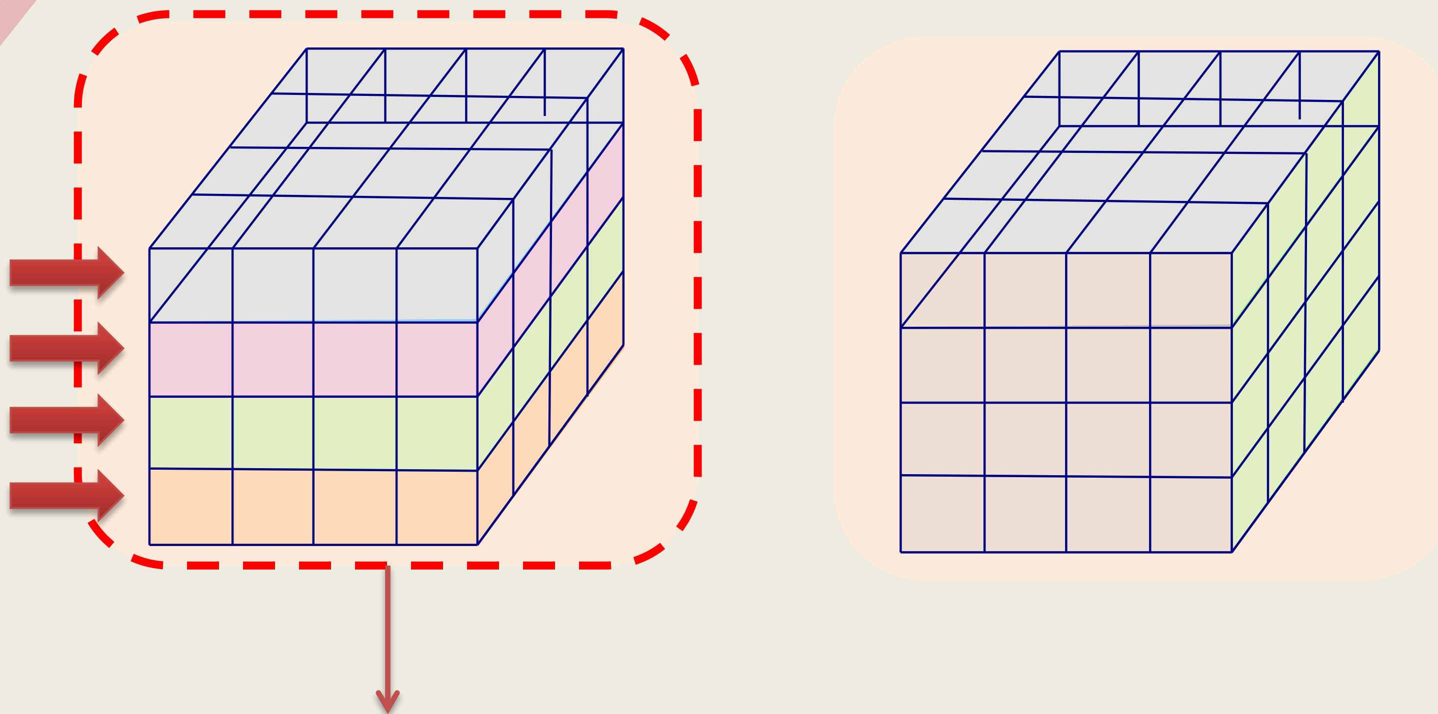
An $m \times n$ chessboard with $m \le n$ has a closed knight's Tour unless one or more of the following three condition hold:

(a) m and n are both odd;

(b) $m \in \{1, 2, 4\}$;

(C) $m = 3$ and $n \in \{4, 6, 8\}$

Objective

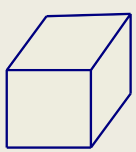


เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของลูกบาศก์ขนาด $n \times n \times n$
ที่สามารถหา Closed Knight’s Tour ได้

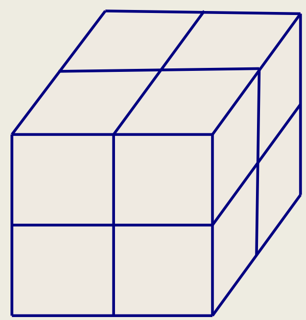
พิจารณา

ตัวม้าไม่สามารถเดินได้
เนื่องจากมีขนาดเล็กไป

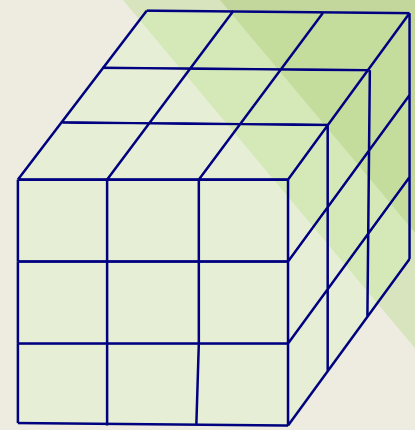
ตัวม้าไม่สามารถเดินเข้าไปช่อง
ด้านในสุดได้หรือ เดินออกมาจาก
ช่องด้านในสุดได้



$1 \times 1 \times 1$

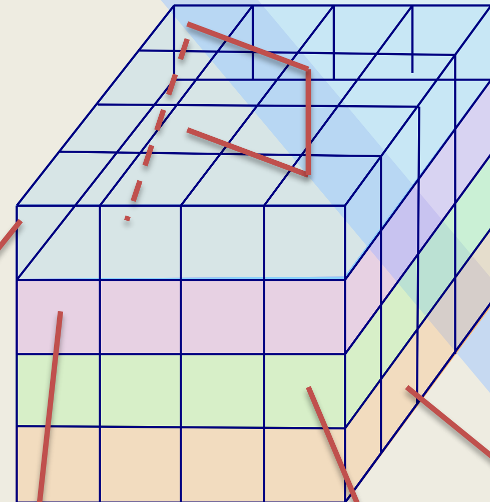


$2 \times 2 \times 2$



$3 \times 3 \times 3$

$4 \times 4 \times 4$



4	23	30	9
29	10	3	24
22	1	12	31
11	32	21	2

1

27	8	13	18
14	17	28	7
5	26	19	16
20	15	6	25

2

36	55	62	41
61	42	35	56
54	33	44	63
43	64	53	34

3

59	40	45	50
46	49	60	39
37	58	51	48
52	47	38	57

4

จากการสังเกตและพิสูจน์จะได้ว่า

เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของลูกบาศก์ขนาด $n \times n \times n$

ที่สามารถหา closed Knight’s Tour ได้ คือ

$$n \geq 4$$

และ n เป็นจำนวนคู่

Theorem: For $n \geq 4$, the cube of side n contains a closed knight’s tour if and only if n is even.

- Part I: The nonexistence of a closed Knight’s Tour within the cube of the side $n \;^{\circ}\; 1(\mathrm{mod}\ 2)$
- Part II: Construction of a closed knight’s Tour within the cube of side $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$
- Part III: construction of a closed knight’s tour within the cube of side $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$

3 sections of proving

Part I: The nonexistence of a closed Knight's Tour within the cube of the side $n \equiv 1 \pmod{2}$

จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

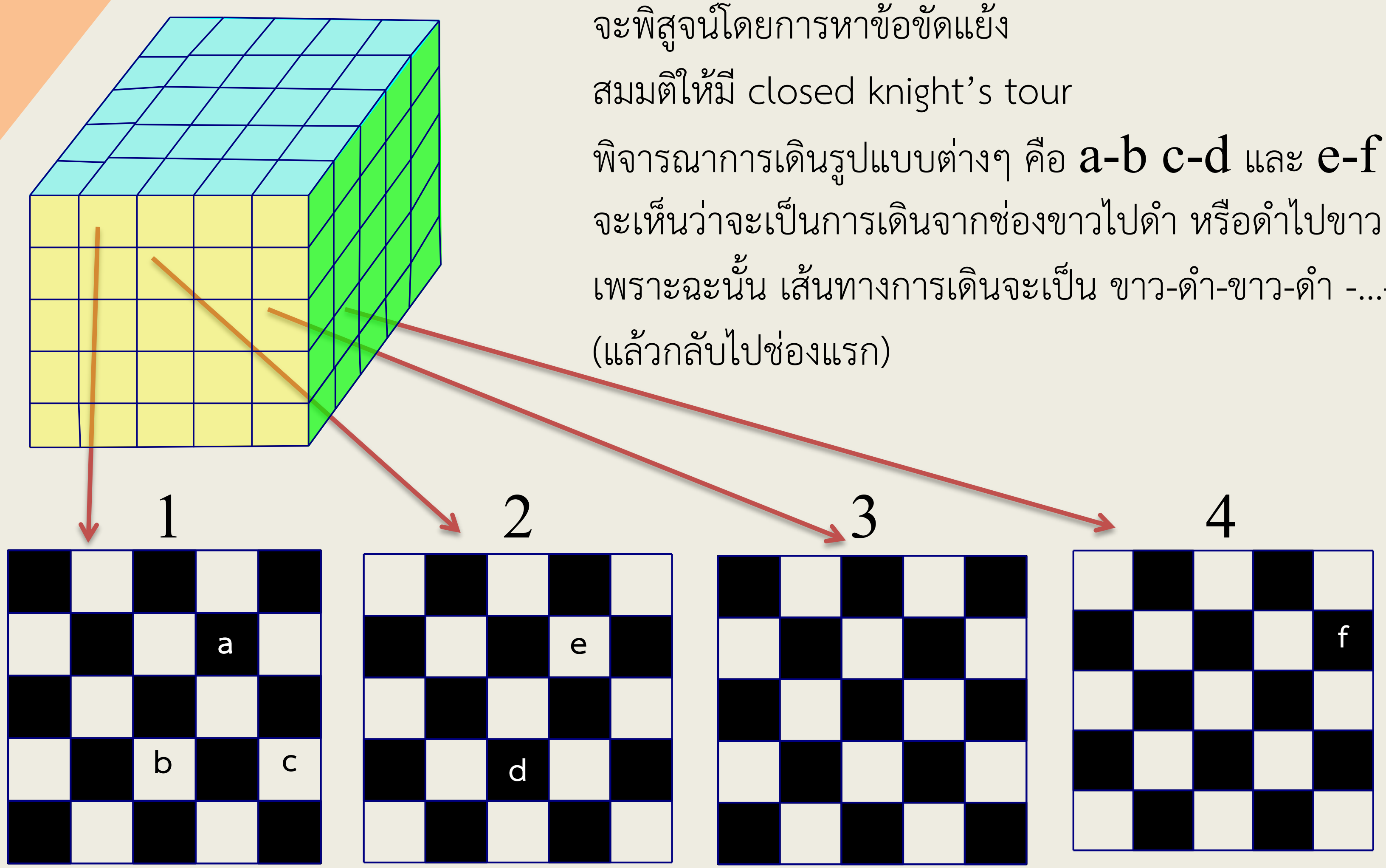
สมมติให้มี closed knight's tour

พิจารณาการเดินรูปแบบต่างๆ คือ **a-b c-d** และ **e-f**

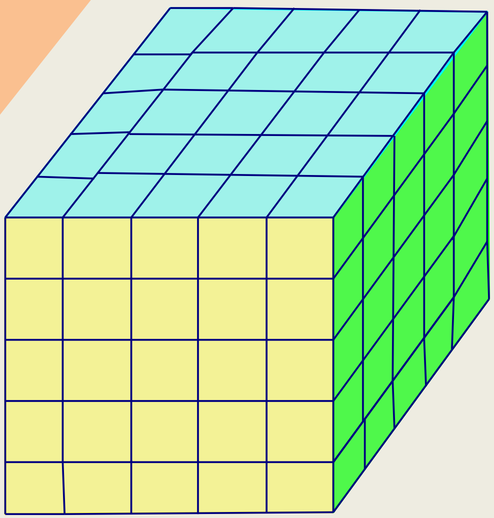
จะเห็นว่าจะเป็นการเดินจากช่องขาวไปดำ หรือดำไปขาว

เพราะฉะนั้น เส้นทางการเดินจะเป็น ขาว-ดำ-ขาว-ดำ -...-ดำ

(แล้วกลับไปช่องแรก)



Part I: The nonexistence of a closed Knight's Tour within the cube of the side $n \equiv 1 \pmod{2}$ (ต่อ)



ดำ 63 ช่อง

ขาว 62 ช่อง

ดังนั้น จำนวนช่องสีขาวต้องเท่ากับจำนวนช่องสีดำ

แต่เนื่องจาก $n \equiv 1 \pmod{2}$

และ มีช่องสีดำจำนวน $\left\lceil \frac{n^3}{2} \right\rceil$ ช่อง

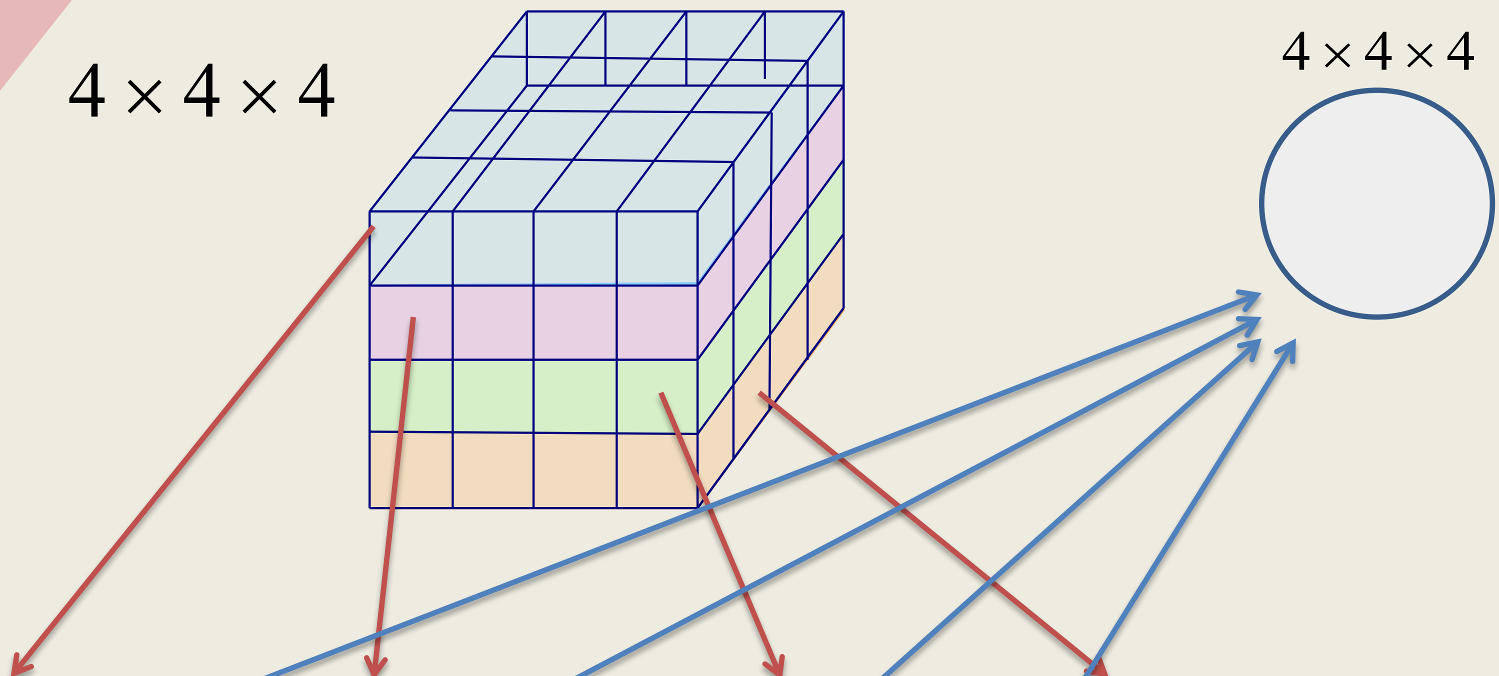
ช่องสีขาวจำนวน $\left\lfloor \frac{n^3}{2} \right\rfloor$ ช่อง

ทำให้ $\left\lceil \frac{n^3}{2} \right\rceil \neq \left\lfloor \frac{n^3}{2} \right\rfloor$

จึงขัดแย้งกับที่จำนวนช่องสีขาวต้องเท่ากับจำนวนช่องสีดำ

ดังนั้น ไม่มี closed knight's tour สำหรับลูกบาศก์ที่มีความยาวด้าน $n \equiv 1 \pmod{2}$ □

Part II: Construction of a closed knight's Tour within the cube of side $n \equiv 0 (\bmod 4)$



4	23	30	9
29	10	3	24
22	1	12	31
11	32	21	2

1

27	8	13	18
14	17	28	7
5	26	19	16
20	15	6	25

2

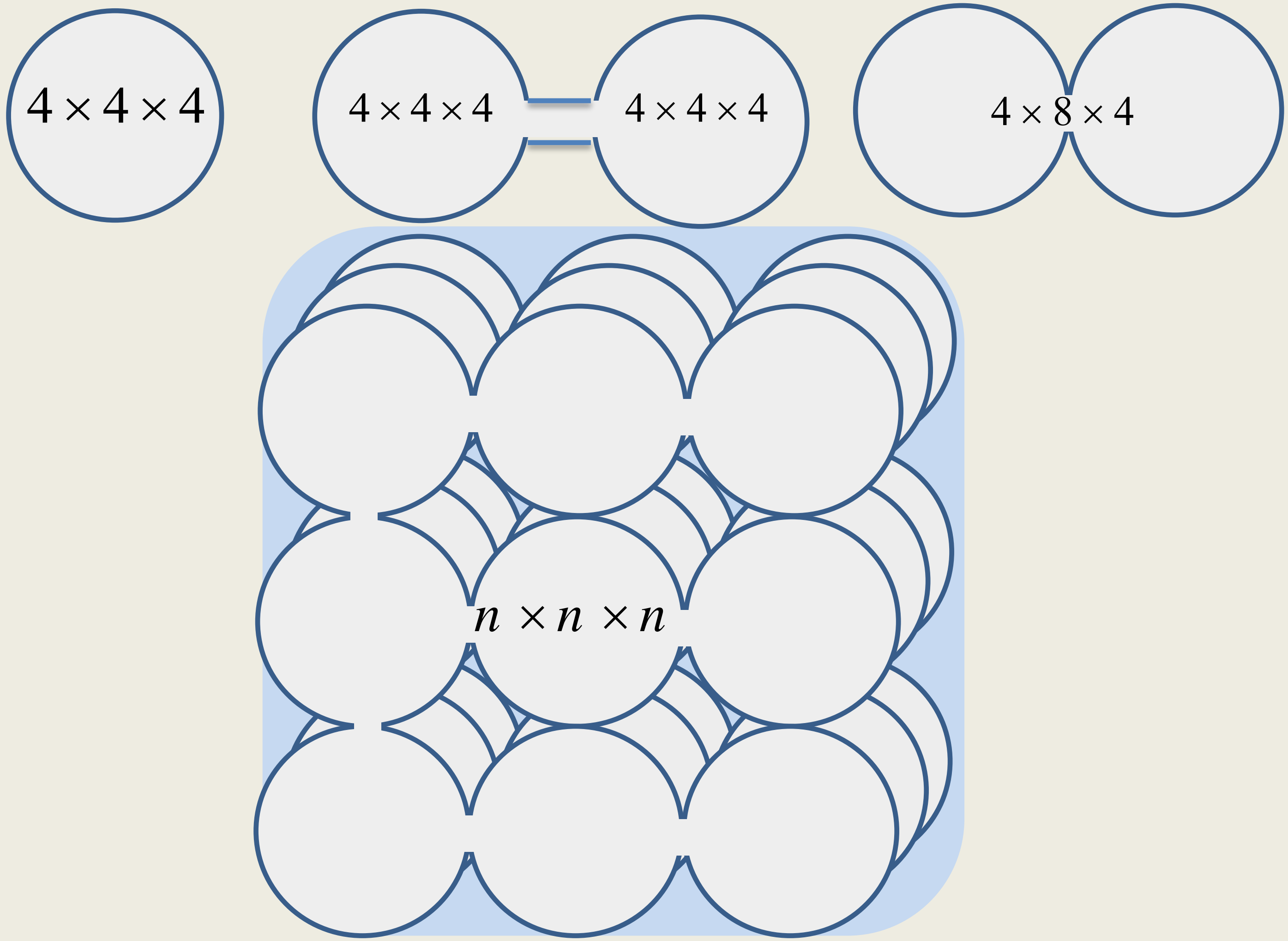
36	55	62	41
61	42	35	56
54	33	44	63
43	64	53	34

3

59	40	45	50
46	49	60	39
37	58	51	48
52	47	38	57

4

Part II: Construction of a closed knight's Tour within the cube of side $n \equiv 0 \pmod 4$

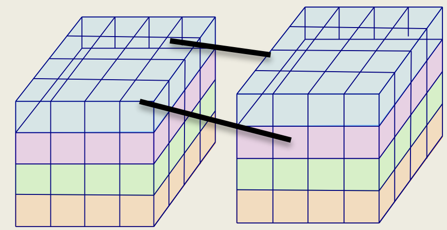


Part II: Construction of a closed knight's Tour within the cube of side $n \equiv 0 (\bmod 4)$

KT_1

4	23	30	9
29	10	3	24
22	1	12	31
11	32	21	2

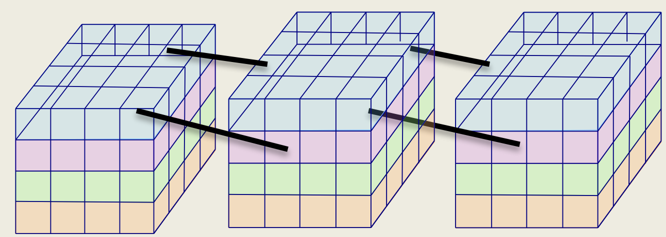
27	8	13	18
14	17	28	7
5	26	19	16
20	15	6	25



ชั้นหนึ่งของลูกบาศก์ที่1 ชั้นสองของลูกบาศก์ที่2

4	23	30	9
29	10	3	24
22	1	12	31
11	32	21	2

27	8	13	18
14	17	28	7
5	26	19	16
20	15	6	25



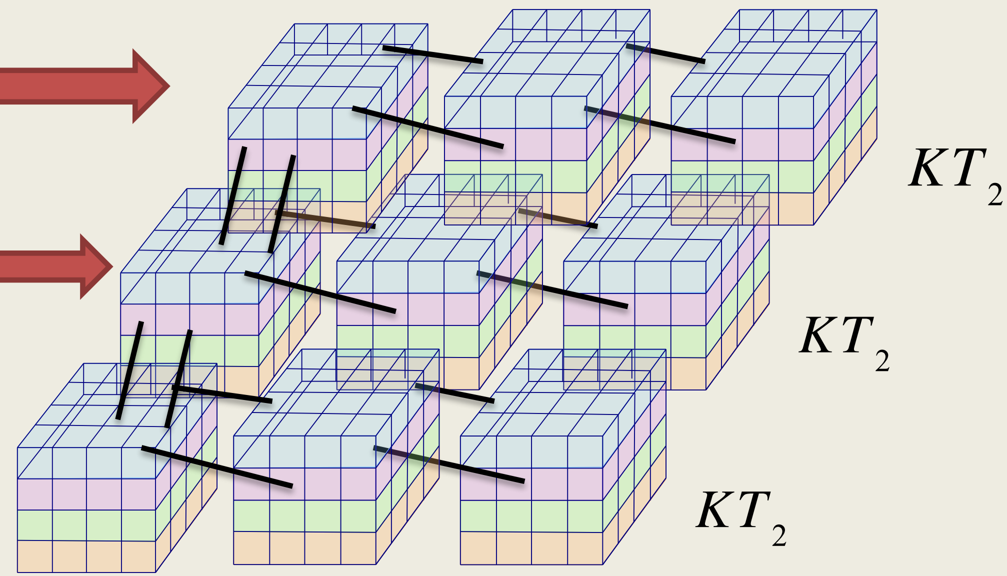
$KT_2 : 4 \times n \times 4$

ชั้นหนึ่งของลูกบาศก์ที่2 ชั้นสองของลูกบาศก์ที่3

Part II: Construction of a closed knight's Tour within the cube of side $n \equiv 0 (\bmod 4)$

ชั้น2ของแต่ละลูกบาศก์ทางซ้ายสุดของ KT_2

27	8	13	18
14	17	28	7
5	26	19	16
20	15	6	25
27	8	13	18
14	17	28	7
5	26	19	16
20	15	6	25
27	8	13	18
14	17	28	7
5	26	19	16
20	15	6	25



$$KT_3 : n \times n \times 4$$

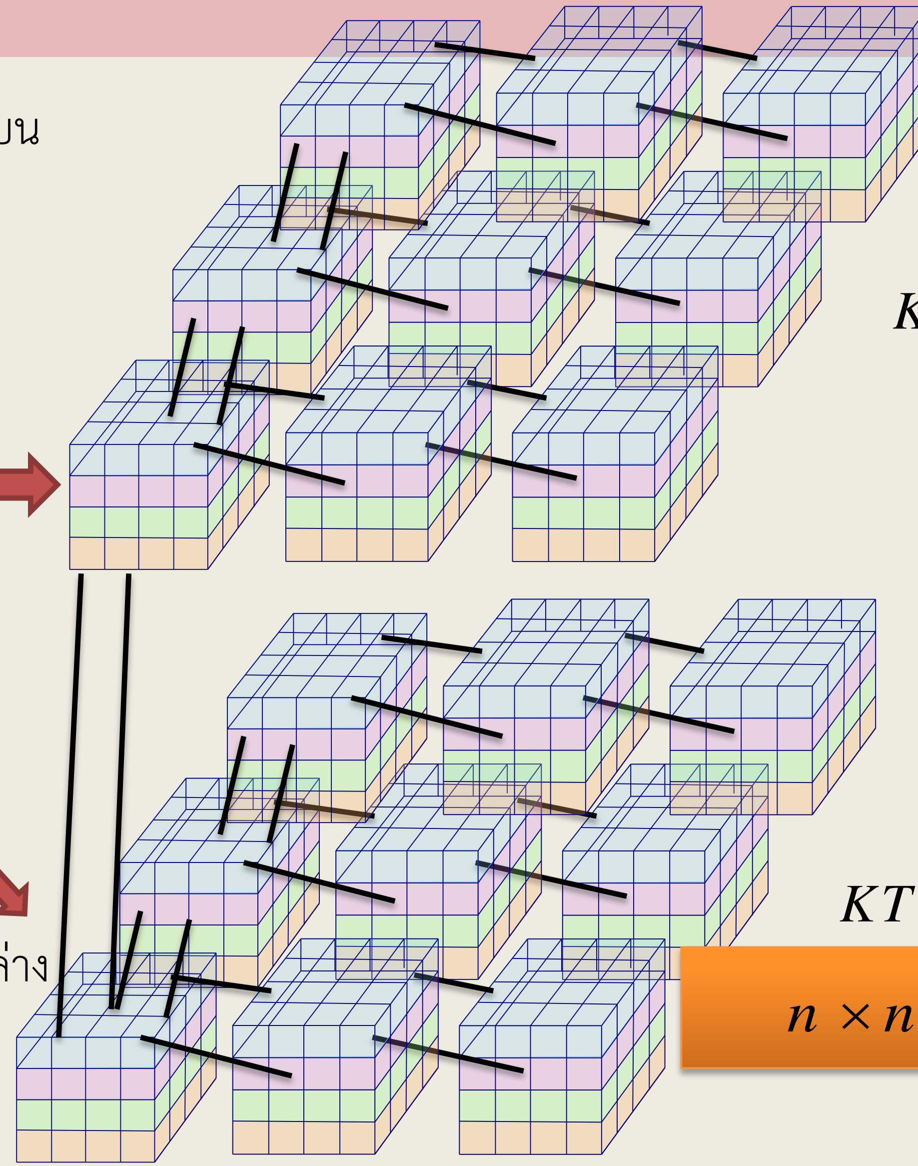
Part II: Construction of a closed knight's Tour within the cube of side $n \equiv 0 (\mod 4)$

ชั้น4ของแต่ละลูกบาศก์ด้านบน
ทางซ้ายสุดของ KT_3

59	40	45	50
46	49	60	39
37	58	51	48
52	47	38	57

4	23	30	9
29	10	3	24
22	1	12	31
11	32	21	2

ชั้น1ของแต่ละลูกบาศก์ด้านล่าง
ทางซ้ายสุดของ KT_3



KT_3

KT_3

$n \times n \times n$

Part II: Construction of a closed knight's Tour within the cube of side $n \equiv 0 \pmod 4$

$n \times n \times n$ → $n \times m \times k$

$n \equiv 0 \pmod 4$

$$n \equiv 0 \pmod 4$$
$$m \equiv 0 \pmod 4$$
$$k \equiv 0 \pmod 4$$

เราสามารถหาclosed knight's tour ในลูกบาศก์ที่มีด้านยาว $n \times n \times n$ และในปริซึมฐานสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้าน $n \times m \times k$ ได้เสมอ เมื่อ

$$n \equiv 0 \pmod 4$$
$$m \equiv 0 \pmod 4$$
$$k \equiv 0 \pmod 4$$

Part III: construction of a closed knight's tour within the cube of side $n \equiv 2 \pmod 4$

47	50	53	38	41	62
52	39	48	63	54	37
49	46	51	40	61	42
66	69	64	57	72	55
45	58	67	70	43	60
68	65	44	59	56	71

104	81	102	85	88	83
101	94	105	82	75	86
80	103	100	87	84	89
95	106	93	76	99	74
92	79	108	97	90	77
107	96	91	78	73	98

5	16	7	34	3	36
18	33	4	1	8	27
15	6	17	28	35	2
22	19	32	11	26	9
31	14	21	24	29	12
20	23	30	13	10	25

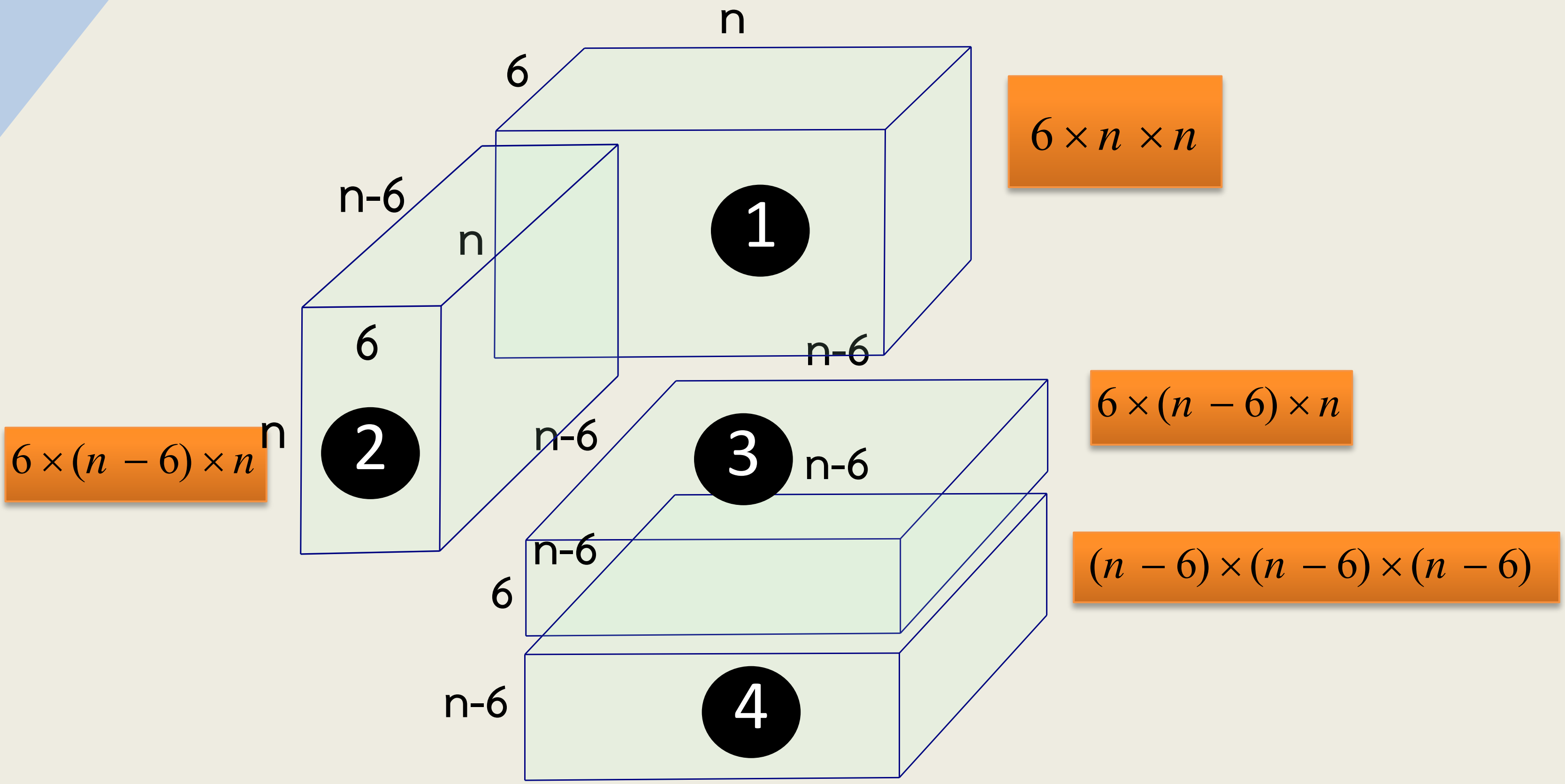
122	133	138	115	120	131
137	114	121	132	139	116
134	123	136	117	130	119
113	144	111	124	127	140
110	135	142	129	118	125
143	112	109	126	141	128

185	204	193	216	187	206
194	199	186	205	192	215
203	184	211	198	207	188
200	195	202	189	214	191
183	210	197	212	181	208
196	201	182	209	190	213

174	165	176	147	150	163
177	146	173	164	167	148
172	175	166	149	162	151
145	178	155	170	159	168
154	171	180	157	152	161
179	156	153	160	169	158

$$6 \times 6 \times 6$$

Part III: construction of a closed knight's tour within the cube of side $n \equiv 2 \pmod 4$



Part III: construction of a closed knight's tour within the cube of side $n \equiv 2 \pmod 4$

พิจารณา

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

6×4 Open tour

จะขยายไปทางด้านกว้าง

1	4	23	20	1	4	23	20
24	21	2	5	24	21	2	5
3	6	19	22	3	6	19	22
16	13	8	11	16	13	8	11
7	10	15	18	7	10	15	18
14	17	12	9	14	17	12	9

$6 \times 4k$ Open tour

เหลือปลายเปิดคือ 1 และ 24 ทาง
ซ้ายมือสุด ซึ่งจะนำไปเชื่อมต่อไป

Part III: construction of a closed knight's tour within the cube of side $n \equiv 2 \pmod 4$

1

1	50	53	38	41	62
	39	48	63	54	37
49	46	51	40	61	42
66	69	64	57	72	55
45	58	67	70	43	60
68	65	44	59	56	71

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

2

2	81	102	85	88	83
	94	105	82	75	86
80	103	100	87	84	89
95	106	93	76	99	74
92	79	108	97	90	77
107	96	91	78	73	98

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

3

3	16	7	34	3	36
	33	4	1	8	27
15	6	17	28	35	2
22	19	32	11	26	9
31	14	21	24	29	12
20	23	30	13	10	25

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

4

4	133	138	115	120	131
	114	121	132	139	116
134	123	136	117	130	119
113	144	111	124	127	140
110	135	142	129	118	125
143	112	109	126	141	128

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

5

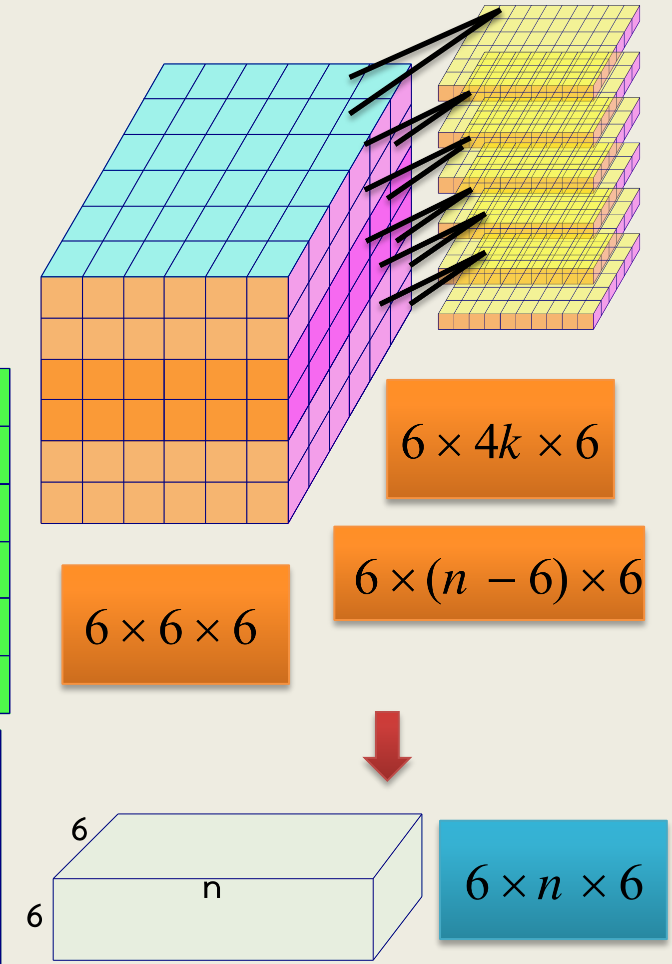
5	204	193	216	187	206
	199	186	205	192	215
203	184	211	198	207	188
200	195	202	189	214	191
183	210	197	212	181	208
196	201	182	209	190	213

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

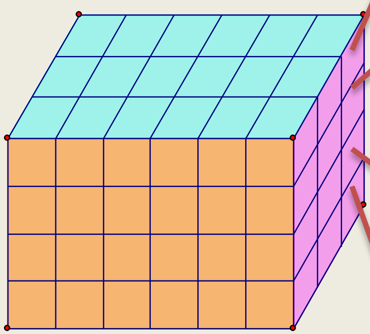
6

6	165	176	147	150	163
	146	173	164	167	148
172	175	166	149	162	151
145	178	155	170	159	168
154	171	180	157	152	161
179	156	153	160	169	158

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9



Part III: construction of a closed knight's tour within the cube of side $n \equiv 2 \pmod 4$



$3 \times 6 \times 4$

1

1	6	47	28	33	38
46	57	4	37	12	31
5	2	43	32	29	34

2

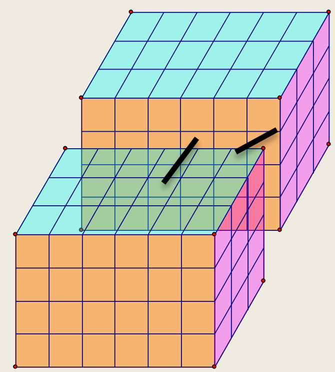
52	49	72	7	40	27
71	64	53	26	19	8
54	51	48	9	42	39

3

55	58	67	10	13	22
68	3	44	23	30	35
45	56	59	36	11	14

4

66	63	60	21	18	15
61	50	69	16	41	24
70	65	62	25	20	17



$6 \times 6 \times 4$

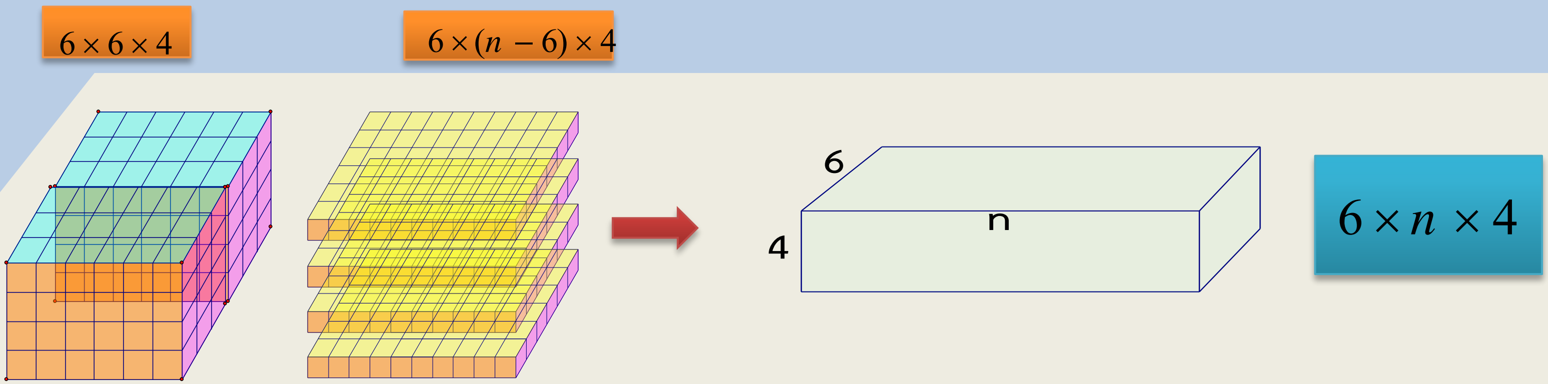
ชั้นที่1ของ $3 \times 6 \times 4$
ชิ้นที่1

1	6	47	28	33	38
46	57	4	37	12	31
5	2	43	32	29	34

ชั้นที่2ของ$3 \times 6 \times 4$
ชิ้นที่2

52	49	72	7	40	27
71	64	53	26	19	8
54	51	48	9	42	39

Part III: construction of a closed knight's tour within the cube of side $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$



1

1	6	47	28	33	38
46	57	4	37	12	31
5	2	43	32	29	34
1	6	47	28	33	38
46	57	4	37	12	31
5	2	43	32	29	34

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

2

55	58	67	10	13	22
68	3	44	23	30	35
45	56	59	36	11	14
55	58	67	10	13	22
68	3	44	23	30	35
45	56	59	36	11	14

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

3

52	49	72	7	40	27
71	64	53	26	19	8
54	51	48	9	42	39
52	49	72	7	40	27
71	64	53	26	19	8
54	51	48	9	42	39

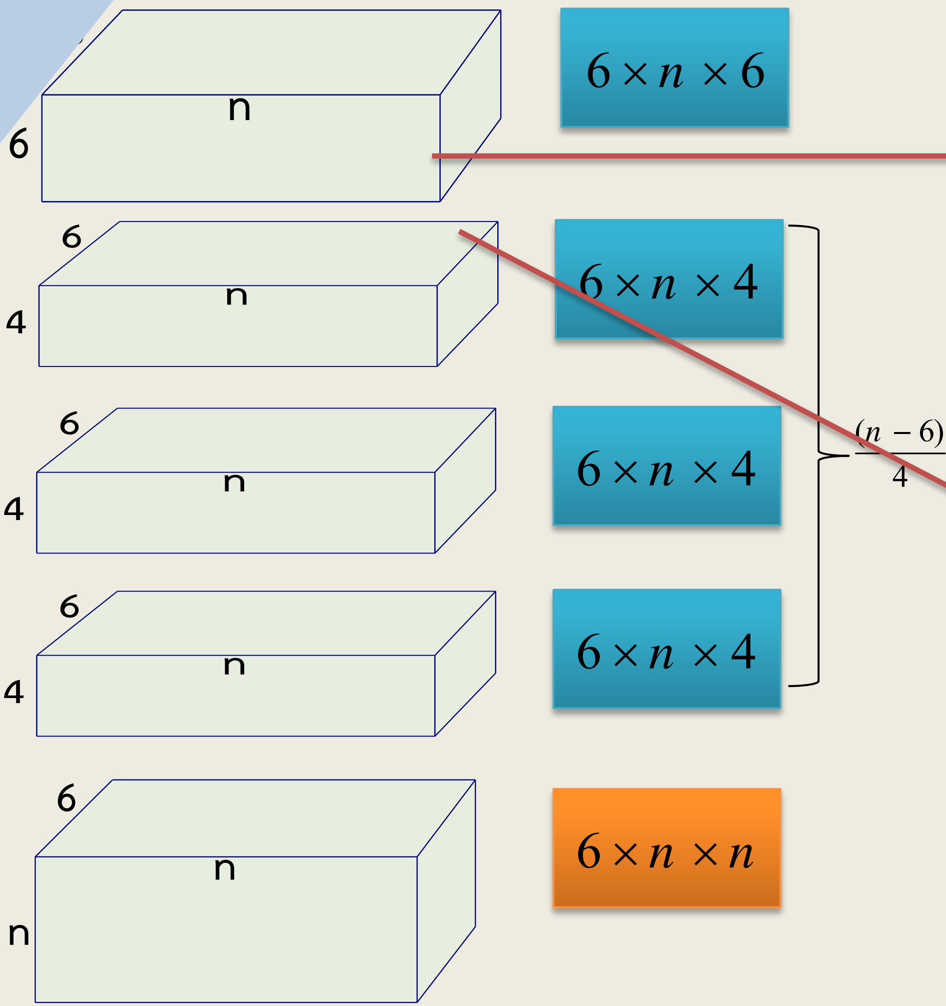
1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

4

66	63	60	21	18	15
61	50	69	16	41	24
70	65	62	25	20	17
66	63	60	21	18	15
61	50	69	16	41	24
70	65	62	25	20	17

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

Part III: construction of a closed knight's tour within the cube of side $n \equiv 2 \pmod 4$



ชั้น6ของ$6 \times n \times 6$

174	165	176	147	150	163
177	146	173	164	167	148
172	175	166	149	162	151
145	178	155	170	159	168
154	171	180	157	152	161
179	156	153	160	169	158

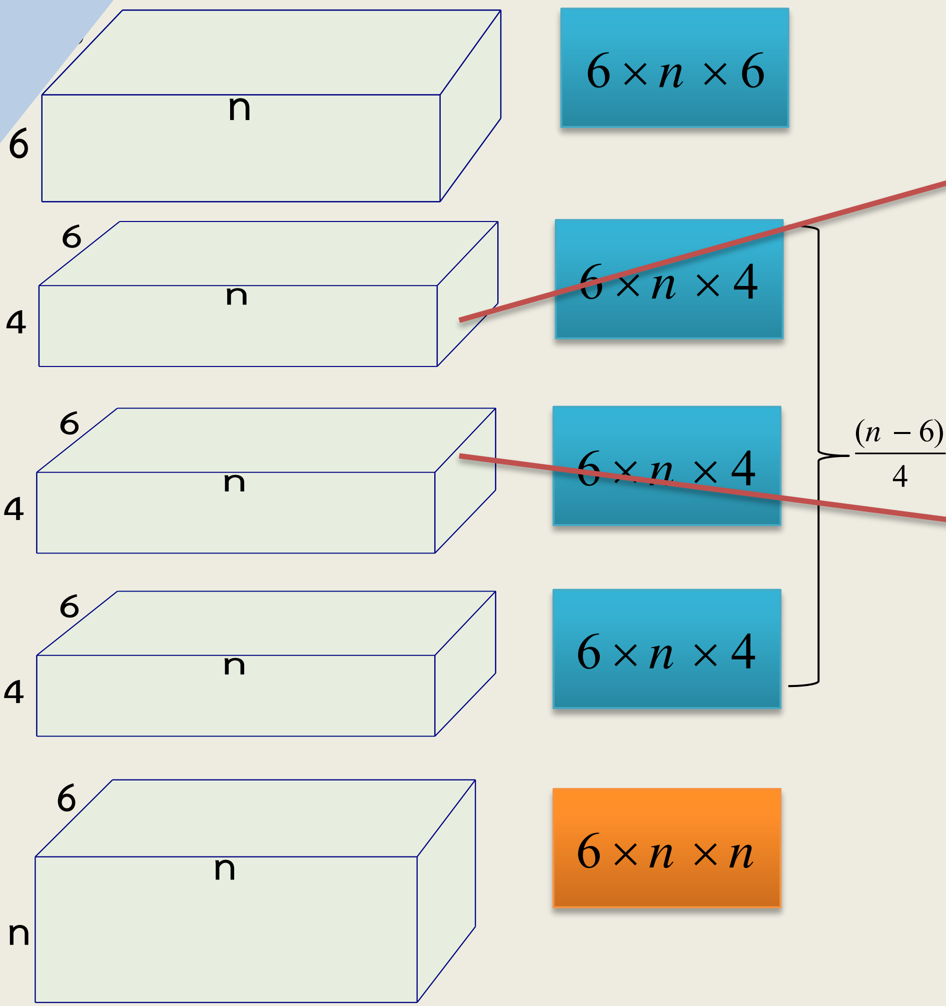
1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

ชั้น1ของ$6 \times n \times 4$

1	6	47	28	33	38
46	57	4	37	12	31
5	2	43	32	29	34
1	6	47	28	33	38
46	57	4	37	12	31
5	2	43	32	29	34

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

Part III: construction of a closed knight's tour within the cube of side $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$



ชั้น4ของ$6 \times n \times 4$

66	63	60	21	18	15
61	50	69	16	41	24
70	65	62	25	20	17
66	63	60	21	18	15
61	50	69	16	41	24
70	65	62	25	20	17

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

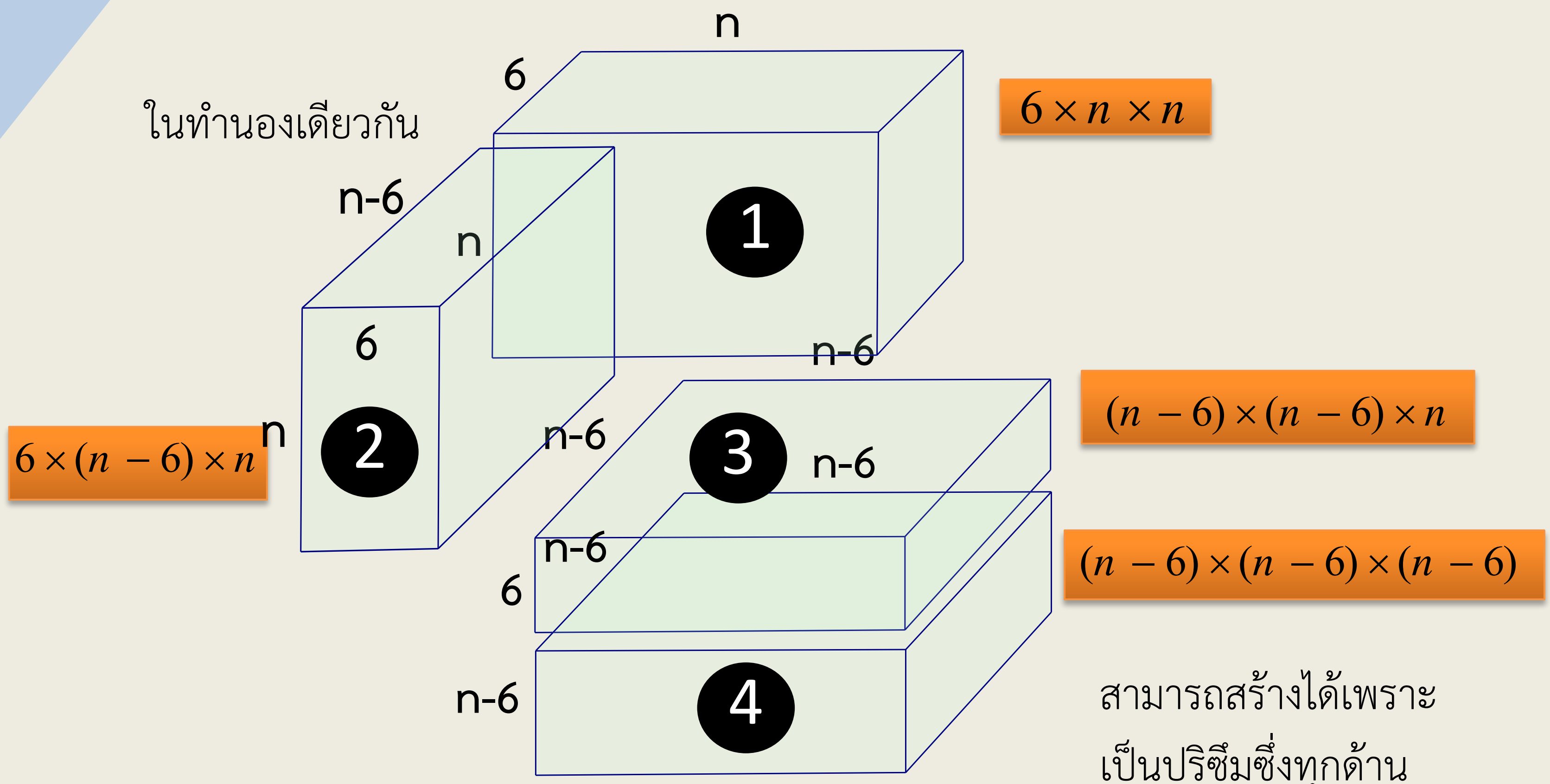
ชั้น1ของ$6 \times n \times 4$

1	6	47	28	33	38
46	57	4	37	12	31
5	2	43	32	29	34
1	6	47	28	33	38
46	57	4	37	12	31
5	2	43	32	29	34

1	4	23	20
24	21	2	5
3	6	19	22
16	13	8	11
7	10	15	18
14	17	12	9

Part III: construction of a closed knight's tour within the cube of side $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$

ในทำนองเดียวกัน



สามารถสร้างได้เพราะ
เป็นปริซึมซึ่งทุกด้าน
หารด้วย4ลงตัว

Part III: construction of a closed knight's tour within the cube of side $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$

ชั้น 2

10	5	32	19
31	20	9	6
8	11	18	29
17	30	7	12

1	14	23	28
24	27	2	13
15	4	25	22
28	21	16	3

ชั้น 1

ชั้น 1

1	14	23	28
24	27	2	13
15	4	25	22
28	21	16	3

ชั้น 2

10	5	32	19
31	20	9	6
8	11	18	29
17	30	7	12

ชั้น 1

1	14	23	28
24	27	2	13
15	4	25	22
28	21	16	3

ชั้น 2

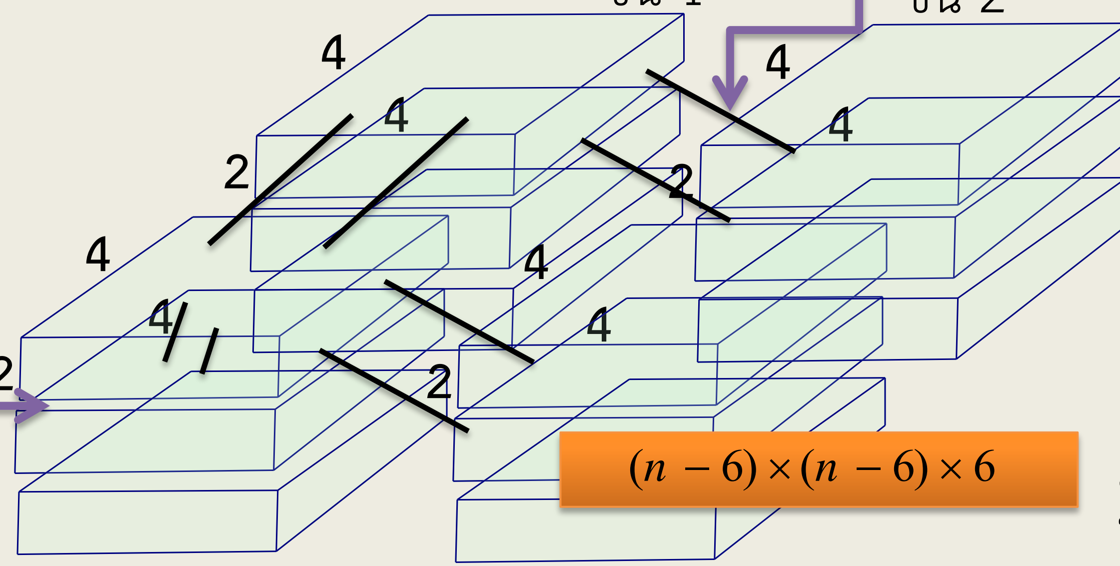
10	5	32	19
31	20	9	6
8	11	18	29
17	30	7	12

1	14	23	28
24	27	2	13
15	4	25	22
28	21	16	3

10	5	32	19
31	20	9	6
8	11	18	29
17	30	7	12

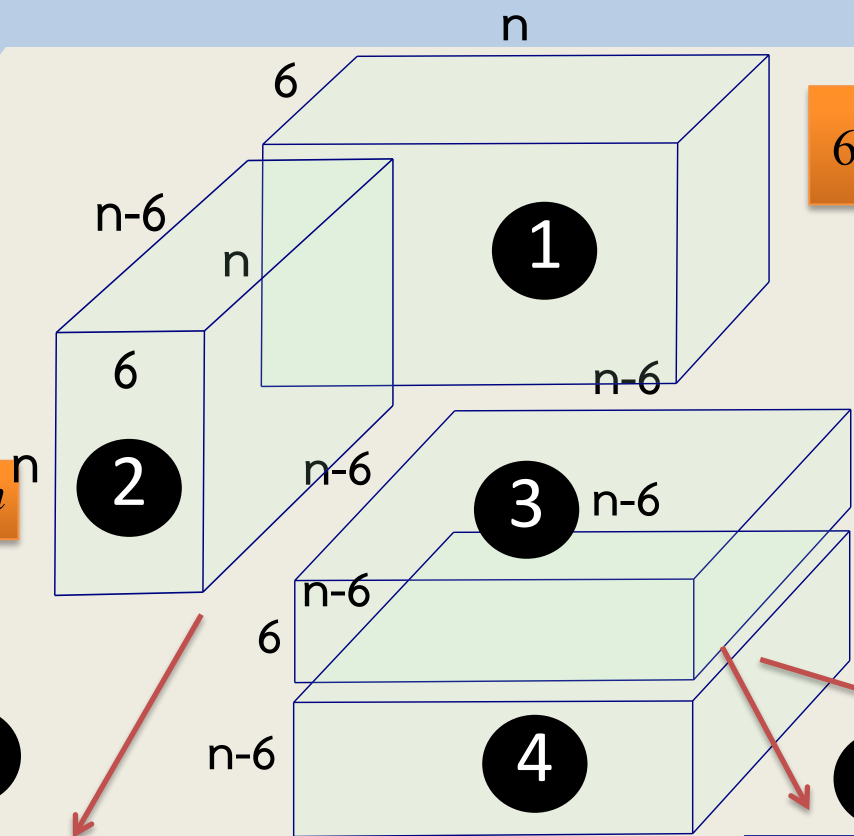
ชั้น 1

ชั้น 2



$(n-6)\times(n-6)\times 6$

Part III: construction of a closed knight's tour within the cube of side $n \equiv 2 \pmod 4$



$6 \times n \times n$

$n \times n \times n$

$(n-6) \times (n-6) \times n$

$6 \times (n-6) \times n$

$(n-6) \times (n-6) \times (n-6)$

พลิกกลับด้านแล้วต่อกัน

2 3

14	7	16	3	24	1
17	10	13	6	21	4
12	15	8	19	2	23
9	18	11	22	5	20

10	5	32	19
31	20	9	6
8	11	18	29
17	30	7	12

3 4

1	14	23	28
24	27	2	13
15	4	25	22
28	21	16	3

ชั้น1ของรูป3

59	40	45	50
46	49	60	39
37	58	51	48
52	47	38	57

ชั้นสุดท้ายของรูป4

Theorem: For $n \geq 4$, the cube of side n contains a closed knight's tour if and only if n is even.

Future work: General rectangular prism

THANK YOU ☺
Q&A