การศึกษาการซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมเพื่อให้ได้พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดภายใต้การเลื่อนขนานและการหมุน

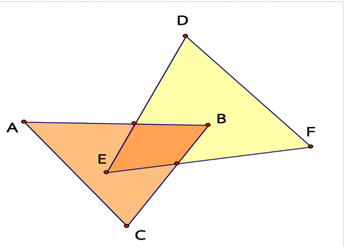
นาย ภูมิ เลิศภิญโญวงศ์, นางสาว นวพรรณ วัฒนาวานิชกูล, นาย กฤตเมธ เล้งรักษา, อ.สิทธิโชค โสมอ่ำ และ ผศ.ดร.วัชรินทร์ วิชิรมาลา
สาขาคณิตศาสตร์ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ 364 หมู่ 5 ตำบลศาลายา อำเภอพุทธมณฑล จังหวัดนครปฐม 73170
ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 254 ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน จังหวัดกรุงเทพฯ 10330

บทคัดย่อ

ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่ซ้อนทับเป็นหนึ่งในปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีผู้คนสนใจอย่างกว้างขวาง งานวิจัยนี้ศึกษาเกี่ยวกับพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ ภายใต้การเลื่อนขนานและการหมุนแต่ไม่รวมถึงการสะท้อน โดยขั้นแรกจะทำการสังเกตการณ์จัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับมีค่ามากที่สุดโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) หลังจากนั้นก็จะทำการสร้างและพิสูจน์ข้อคาดเดา ผลปรากฏว่าพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งไม่มีรูปใดถูกซ้อนทับโดยอีกรูปหนึ่งได้อย่างสนิทนั้นจะเกิดขึ้นเมื่อสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีด้าน 1 ด้านที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันและซ้อนทับกัน หรืออาจเกิดขึ้นเมื่อสามเหลี่ยมสองรูปจัดเรียงตัวเป็นรูปร่างคล้ายรูปดาว 6 แฉก (Star-shaped) ซึ่งในกรณีแรกนั้นจะสามารถหาตำแหน่งการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับมีค่ามากที่สุด อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่สองยังจำเป็นต้องใช้เครื่องมือหรือวิธีการที่มีความซับซ้อนมากขึ้นในการที่จะหาตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับมีค่ามากที่สุด ซึ่งเป็นหัวข้อที่น่าสนใจและควรแก่การศึกษาสืบต่อไป

บทนำ

เนื่องด้วยคณะผู้ศึกษามีความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ ทางด้านเรขาคณิต หลังจากที่ได้อ่านบทความเรื่อง "Computing the Maximum Overlap of Two Convex Polygons Under Translations หรือ การคำนวณหาพื้นที่รวมที่น้อยที่สุดของรูปหลายเหลี่ยมนูนใดๆสองรูปที่ซ้อนทับกัน ภายใต้การเลื่อนขนาน" ทางคณะผู้ศึกษาจึงเกิดความสนใจในปัญหาดังกล่าว และได้แนวคิดที่จะศึกษา "การซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมเพื่อให้ได้พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดภายใต้การเลื่อนขนานและการหมุน"



พื้นที่สีแดงแสดงพื้นที่ซ้อนทับของสามเหลี่ยมทั้งสอง

วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1. เพื่อหาและแสดงวิธีการจัดวางรูปสามเหลี่ยมสองรูปซ้อนทับกันให้เกิดพื้นที่รวมน้อยที่สุด
2. เพื่อนำวิธีการจัดวางดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ในการจัดวางสิ่งของเพื่อให้ใช้พื้นที่น้อยที่สุด เพื่อให้สามารถนำพื้นที่ที่เหลือมาใช้ประโยชน์ได้มากที่สุด เช่น การจัดเรียงสิ่งของในการขนส่งหรือ การออกแบบสิ่งของต่างๆ เป็นต้น

ขั้นตอนและกระบวนการ

1. ศึกษาหาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาข้อนี้ว่ามีปัญหารูปแบบใดแล้วบ้างที่คิดขึ้นมาแล้ว และสำรวจว่ามีเงื่อนไขใดที่เป็นประโยชน์และสามารถนำมาขยายต่อได้
2. นำข้อมูลที่ได้มารวบรวมให้เป็นหมวดหมู่
3. พิจารณารูปแบบการวางรูปสามเหลี่ยมสองรูปในกรณีต่างๆ โดยใช้โปรแกรม GSP ช่วยในการวิเคราะห์หาว่ากรณีใดที่สามารถทำการแปลงให้มีพื้นที่ซ้อนทับมากขึ้นได้บ้าง ซึ่งจะได้ว่าการจัดเรียงแบบนั้นจะไม่ใช่แบบที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุด
4. พิจารณากรณีที่เหลือซึ่งไม่สามารถหาวิธีแปลงให้พื้นที่มากขึ้นได้ จากนั้นหาตำแหน่งที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับน้อยที่สุดสำหรับกรณีนั้นๆ โดยใช้โปรแกรม GSP ช่วยในการหาข้อคาดการณ์ พิสูจน์ แล้วนำของแต่ละกรณีมาเปรียบเทียบกัน
5. ตรวจสอบการพิสูจน์และปรับปรุงแก้ไข
6. นำวิธีแก้ปัญหาที่ได้ทั้งหมดรวมเป็นหมวดหมู่ เรียบเรียงเนื้อหาและบทพิสูจน์ แล้วจัดพิมพ์เป็นรูปเล่ม

ผลการทดลอง

ขั้นแรกจะนิยามสัญลักษณ์เพื่อใช้ในการช่วยแบ่งกรณีว่าสามเหลี่ยมสองรูปจะจัดวางอย่างไรได้บ้าง

บทนิยาม 1 สำหรับจุดยอด A ของสามเหลี่ยมใดๆ *ดีกรีของจุด* A แทนด้วย $deg(A)$ คือด้วยค่าที่แสดงตำแหน่งของจุด A เทียบกับสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง โดยที่

$$deg(A) = \begin{cases} 0, \text{ถ้าจุด } A \text{ อยู่ภายนอกสามเหลี่ยมอีกรูป} \\ 0.5, \text{ถ้าจุด } A \text{ อยู่บนจุดยอดหรือด้านของสามเหลี่ยมอีกรูป} \\ 1, \text{ถ้าจุด } A \text{ อยู่ภายในสามเหลี่ยมอีกรูป} \end{cases}$$

บทนิยาม 2 สำหรับสามเหลี่ยม ABC ใดๆ *ดีกรีของ* ABC แทนด้วย $deg(\Delta ABC)$ คือผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งสามจุดของรูปสามเหลี่ยม ABC

บทนิยาม 3 สำหรับระนาบใดๆ *ดีกรีระนาบ* แทนด้วย deg_T คือผลรวมของดีกรีของรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดบนระนาบ

จากบทนิยามข้างต้นจะพิสูจน์บทตั้งต่อไปนี้เพื่อให้สามารถแบ่งกรณีได้ง่ายขึ้น

บทตั้ง 1 *ถ้า* ΔABC *และ* ΔDEF *เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปบนระนาบ แล้ว* $deg_T \leq 3$

จากบทตั้งข้างต้นสามารถแบ่งกรณีวิธีการจัดวางของรูปสามเหลี่ยม 2 รูปใดๆ แล้วทำการพิสูจน์เพื่อตัดกรณีที่พื้นที่ซ้อนทับไม่มากที่สุดออก กรณีที่เหลือสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

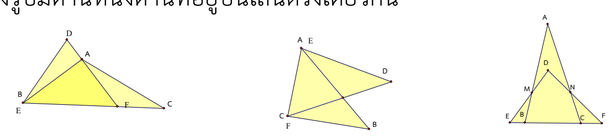
1. สามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีด้านหนึ่งด้านที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
2. สามเหลี่ยมสองรูปเรียงตัวกันเป็นรูปดาว (Star-shaped) และกรณีอื่นๆ บางส่วน

ซึ่งสำหรับลักษณะที่ 1 เราสามารถหากระบวนการที่จะหาตำแหน่งที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับมากสุดได้ดังจะกล่าวในสรุปและอภิปรายผล

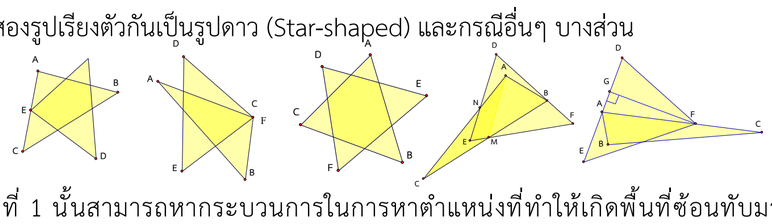
สรุปและอภิปรายผลการทดลอง

จากผลการทดลองสรุปได้ว่า เกือบทุกกรณีจะมีวิธีการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับ มีเพียงบางกรณีที่ยังไม่สามารถหาได้โดย จะแบ่งออกได้เป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

1. สามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีด้านหนึ่งด้านที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

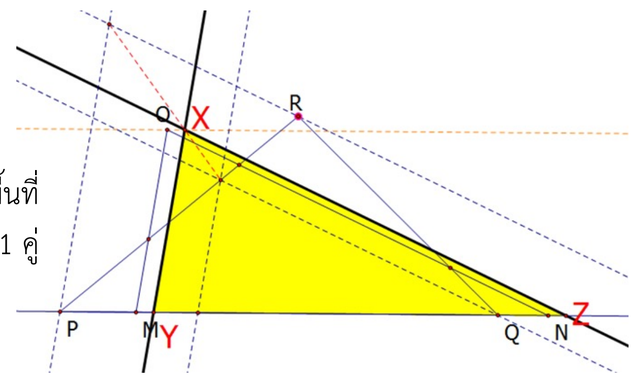


2. สามเหลี่ยมสองรูปเรียงตัวกันเป็นรูปดาว (Star-shaped) และกรณีอื่นๆ บางส่วน



ซึ่งสำหรับกรณีที่ 1 นั้นสามารถหากระบวนการในการหาตำแหน่งที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดเมื่อมีด้านที่กำหนดให้ร่วมกันได้ ดังนี้

1. สร้างสามเหลี่ยม $\mathcal{A}'$ และ $\mathcal{A}''$ โดยที่ $\mathcal{A}'$ คือสามเหลี่ยมที่ใหญ่ที่สุดที่คล้ายกับสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และมีด้านที่สมนัยกับด้านร่วมของ $\mathcal{A}$ ร่วมกับ $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$ และสามารถบรรจุในสามเหลี่ยม $\mathcal{B}$ ได้พอดี และ $\mathcal{A}''$ คือสามเหลี่ยมที่เล็กที่สุดที่คล้ายกับสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และมีด้านที่สมนัยกับด้านร่วมของ $\mathcal{A}$ ร่วมกับ $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$ และสามเหลี่ยม $\mathcal{B}$ สามารถบรรจุได้พอดี
2. ลากเส้นเชื่อมจุดยอดของ $\mathcal{A}'$ และ $\mathcal{A}''$ ที่ไม่ได้อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกันกับด้านร่วมของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$
3. สร้างเส้นขนานด้านร่วมผ่านจุดยอดที่ไม่ได้อยู่บนด้านร่วมของ $\mathcal{A}$ ตัดกับส่วนเส้นตรงในข้อ 2 ที่จุด X
4. จากจุด X ลากเส้นขนานกับด้านของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ ตัดด้านร่วมที่ Y และ Z
5. จากบทสร้างทางเรขาคณิตจะเกิดรูป XYZ เรียกว่าสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ ซึ่งเท่ากันทุกประการกับสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$
6. จะได้ว่าตำแหน่งของสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ จะมีพื้นที่ซ้อนทับกับ $\mathcal{B}$ มากที่สุดเมื่อมีด้าน $\overline{MN}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$



ภาพแสดงกระบวนการหาตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดเมื่อมีด้านร่วม 1 คู่

ปัญหาปลายเปิด

ปัญหาที่ 1 *เป็นไปได้หรือไม่ที่ตำแหน่งที่มีพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดของสามเหลี่ยมสองรูป* $\mathcal{A}$ *และ* $\mathcal{B}$ *จะมีความสัมพันธ์กับรูปสามเหลี่ยมที่ใหญ่ที่สุดที่แนบใน* $\mathcal{B}$ *กับ รูปสามเหลี่ยมที่เล็กที่สุดที่* $\mathcal{B}$ *แนบในได้*

ปัญหาที่ 2 *สำหรับกรณีที่เป็นรูปดาวจะมีกระบวนการสำหรับหาตำแหน่งที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับสูงสุดหรือไม่ และพื้นที่ที่ได้จะมากกว่าหรือน้อยกว่ากรณีที่มีด้านร่วมกัน*

ปัญหาที่ 3 *จะมีวิธีการสำหรับรูปสามเหลี่ยมที่มากกว่า 2 รูปหรือไม่*

ปัญหาที่ 4 *จะมีวิธีการสำหรับรูปหลายเหลี่ยมอื่นหรือไม่*

กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณ อ.สิทธิโชค โสมอ่ำ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ และ ผศ.ดร.วัชรินทร์ วิชิรมาลา สาขาวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เป็นอย่างยิ่ง ที่ได้ให้คำแนะนำและคำปรึกษาที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการทำงานวิจัยชิ้นนี้ให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

บรรณานุกรม

[1] Mark de Berg, Olivier Devillers, Marc van Kreveld, Otfried Schwarzkopf, Monique Teillaud. Computing the Maximum Overlap of Two Convex Polygons Under Translations, *Lecture Notes in Computer Science,* 1178: 1996, 126-135.

[2] Zi-qiang Li, Yan He, Zhuo-jun Tian. Overlapping Area Computation between Irregular Polygons for Its Evolutionary Layout Based on Convex Decomposition, *Journal of Software,* 7, No 2: 2012, 485-492.

[3] Hee-Kap Ahn, Peter Brassb, Chan-Su Shin. Maximum overlap and minimum convex hull of two convex polyhedra under translations. *Computational Geometry,* 40, Issue 2: 2008, 171–177.