เอกสารประกอบการอบรมในโครงการติว สอวน. ประจำปี พ.ศ.2565 โรงเรียนเบ็ญจะมะมหาราช
เวลา 7:30-8:30 วันที่ 1 กรกฎาคม 2565

ชื่อ-สกุล: Solutions

โจทย์ปัญหามีทั้งหมด 6 ข้อ โดยโจทย์ 5 ข้อแรกไม่ได้เรียงตามความยากง่าย สามารถเลือกทำข้อไหนก่อนก็ได้ ส่วนข้อสุดท้ายเป็น challenging problem

1. $\overline{4A8B3C}$ เป็นจำนวนนับ 6 หลักที่แต่ละหลักแตกต่างกันทั้งหมดและไม่มีเลขหลักใดเป็น 0 ถ้าจำนวนนี้หารด้วย 88 ลงตัว จงหา $A^2 + B + C$ ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้

Solution:

$\overline{4A8B3C}$ หารด้วย 11 ลงตัว → $4+8+3 \equiv A+B+C \pmod{11}$

$15 \equiv A+B+C \pmod{11}$

เป็นไปไม่ได้

∴ $A+B+C = \cancel{4}$ หรือ 15

$(A,B,C) = (1,5,9)$ หรือ $(2,6,7)$

เป็นไปไม่ได้ เพราะ $\overline{4A8B3C}$ หารด้วย 8 ลงตัว → C ต้องเป็นเลขคู่

∴ $(A,B,C) = (2,6,7)$

$\overline{B3C}$ หารด้วย 8 ลง → $B=7, C=6$ → $A^2+B+C = 17$

$B=6, C=2$ → $A^2+B+C = 57$

2. นาย A ต้องการสร้างเลข 4 หลักจากเลขโดด $1, 2, 3, 4, 5$ โดยไม่ใช้เลขซ้ำกัน จงหาความน่าจะเป็นที่เลขที่นาย A สร้างหารด้วย 4 ลงตัว

Solution:

สามารถสร้างได้ทั้งหมด $\underline{5}\times\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{2} = 120$

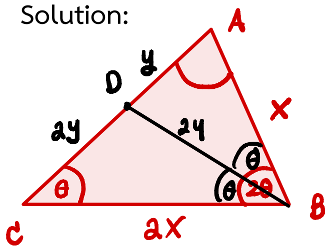
จำนวนที่หารด้วย 4 ลงตัว ... ลงท้ายด้วย

$\left.\begin{array}{l} \underline{3}\times\underline{2}\ 12 \\ \underline{3}\times\underline{2}\ 24 \\ \underline{3}\times\underline{2}\ 32 \\ \underline{3}\times\underline{2}\ 52 \end{array}\right\}\ 24$

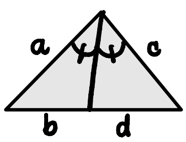
ความน่าจะเป็น $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$

3. กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่ง $\angle B = 2\angle C$ และ $BC = 2AB$ จงหา $\angle A + \angle C$.

Solution:



Angle of bisector



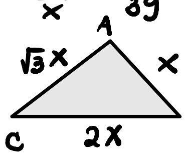
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ or $ad = bc$

1. สร้างเส้นตรง BD แบ่งครึ่งมุม B
2. ใช้ Angle of bisector $CD : DA = 2:1$
3. $CD = BD$ เพราะ ΔBCD เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
4. $\Delta ABD \sim \Delta ACD$

4. ต่อ

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{3y}$ → $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$



∴ $\left.\begin{array}{l}\angle A = 90^\circ \\ \angle C = 30^\circ\end{array}\right\} + = 120^\circ$

4. มีจำนวนเต็มบวก n ตั้งแต่ 1 ถึง 100 กี่จำนวน ที่ n^3+1 หารด้วย 5 ลงตัว

Solution:

n^3+1 ลงท้ายด้วย 0 หรือ 5

$\Rightarrow n^3$ ลงท้ายด้วย 9 หรือ 4

หลักหน่วย n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
หลักหน่วย n^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

$\therefore$ n ที่เป็นไปได้ $4, 9, 14, 19, \ldots, 94, 99$

$\Rightarrow$ 20 จำนวน

5. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามที่หารด้วย $x-1, x-2,$ และ $x-3$ เหลือเศษ $1, 3,$ และ 6 ตามลำดับ จงหาเศษที่เหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย $(x-1)(x-2)(x-3)$

Solution: "Division Algorithm" ดีกรีของเศษ น้อยกว่า ดีกรีของตัวหารเสมอ

$$\underbrace{P(x)}_{\substack{\text{ตัวตั้ง} \\ \text{(dividend)}}} = \underbrace{Q(x)}_{\substack{\text{ผลหาร} \\ \text{(quotient)}}}\underbrace{(x-1)}_{\substack{\text{ตัวหาร} \\ \text{(divisor)}}} + \underbrace{R(x)}_{\substack{\text{เศษ} \\ \text{(Remainder)}}}$$

$P(1)=1,\ P(2)=3,\ P(3)=6$

$P(x) = Q'(x)(x-1)(x-2)(x-3) + (ax^2+bx+c)$

$x=1$: $1 = 0 + a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \rightarrow 1 = a+b+c$

$x=2$: $3 = 0 + a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \rightarrow 3 = 4a+2b+c$

$x=3$: $6 = 0 + a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \rightarrow 6 = 9a+3b+c$

แก้ระบบสมการ $a=b=\frac{1}{2}$ $c=0$

เศษ $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 0$

6. (Challenging) ให้ $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ เป็นจำนวนตรรกยะที่สอดคล้องกับ

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}} = 2^{q_1} + 2^{q_2} + 2^{q_3} + \ldots + 2^{q_n}$$

จงหาค่าของ $2(n+q_1+q_2+\ldots+q_n)$

conjugate: $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$

Solution:

$$\frac{1}{2^{1/2}-2^{1/3}} = \frac{1}{2^{1/2}-2^{1/3}}\cdot\frac{2^{1/2}+2^{1/3}}{2^{1/2}+2^{1/3}} = \frac{2^{1/2}+2^{1/3}}{2-2^{2/3}}$$

conjugate: $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$

$$\frac{2^{1/2}+2^{1/3}}{2-2^{2/3}}\cdot\frac{(2^2+2\cdot 2^{2/3}+2^{4/3})}{(2^2+2\cdot 2^{2/3}+2^{4/3})} = \frac{(2^{1/2}+2^{1/3})(2^2+2^{5/3}+2^{4/3})}{8-4}$$

$$= \frac{2^{5/2}+2^{7/3}+2^{13/6}+2^2+2^{11/6}+2^{5/3}}{4}$$

$$= 2^{1/2}+2^{1/3}+2^{1/6}+2^0+2^{-1/6}+2^{-1/3}$$

$\therefore$ $n=6,\ q_1=1/2,\ q_2=1/3,\ q_3=1/6,\ q_4=0,\ q_5=-1/6,\ q_6=-1/3$

Notes:

$2(n+q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6)$

$= 2\left(6+\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{6}}+0-\cancel{\frac{1}{6}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)$

$= 2\left(\frac{13}{2}\right) = 13$