จำนวนและการดำเนินการ

• การหารลงตัว

หารด้วย	วิธีสังเกต
1	ทุกจำนวน
2	เลขคู่
3	ผลรวมเลขโดดหารด้วย 3 ลง
4	2 หลักสุดท้าย หารด้วย 4 ลง
5	ลงท้ายด้วย 0 หรือ 5
6	→ ดู 2 และ 3
7	.... ไม่มีทริคที่ง่าย ...
8	3 หลักสุดท้าย หารด้วย 8 ลง
9	ผลรวมเลขโดดหารด้วย 9 ลง
10	ลงท้ายด้วย 0
11	(ผลรวมหลักคู่) − (ผลรวมหลักคี่) หารด้วย 11 ลง

ex. 352913

- วิธี proof ง่ายที่สุด คือใช้ mod
- ปกติสอนในสอวน ค่ายที่ 1.

◦ Modular arithmetic (พวก mod ที่เราใช้กัน)

นิยาม $a \equiv b \pmod n \leftrightarrow n \mid (a-b)$

e.g. $112 \equiv 7 \pmod 5$ เพราะว่า $5 \mid (112-7)$

ทฤษฎีบท ถ้า $a \equiv b \pmod n$ แล้ว

1. $a+c \equiv b+c \pmod n$
2. $ac \equiv bc \pmod n$
3. $a^k \equiv b^k \pmod n \quad k \geq 1$

• Pf. $\overline{a_m a_{m-1} \dots a_0}$ หารด้วย 9 ลง $\longleftrightarrow$ $a_m + a_{m-1} + \dots + a_0$ หารด้วย 9 ลง

$$\overline{a_m a_{m-1} \dots a_0} = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_0$$

$$\therefore \overline{a_m a_{m-1} \dots a_0} \equiv a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_0 \pmod 9$$

Modular arithmetic (พวก mod ที่เราใช้กัน)

นิยาม $a \equiv b \pmod{n} \leftrightarrow n \mid (a-b)$

ทฤษฎีบทที่น่ารู้

4 (ผลพลอยได้ ของ ทฤษฎีบทเหลือของจีน)

ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$

และ $a \equiv b \pmod{n}$

และ $(m,n) = 1$

$a \equiv b \pmod{mn}$

ex. จงหาเศษจากการหาร 1234567 ด้วย 15

$1234567 \equiv \quad \pmod{3}$

$1234567 \equiv \quad \pmod{5}$

$\therefore 1234567 \equiv \quad \pmod{15}$

ผลรวมเลขโดด
หารด้วย 3 เหลือเศษ
เท่าไหร่
จำนวนนั้นก็หาร 3
เหลือเศษเท่านั้น

(9 ก็เหมือนกัน)

5 Fermat's little theorem

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ
ถ้า $p \nmid a$ แล้ว $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

ex. $p = 3$ $a = 20$

$20^{3-1} \equiv 1 \pmod{3}$

ลองเช็ค :

ทฤษฎีบทมูลฐานเลขคณิต (Fundamental theorem of Arithmetic)

จำนวนนับใดๆ สามารถเขียนได้ในรูปของ ผลคูณของจำนวนเฉพาะได้เพียงวิธีเดียว

$$\boxed{n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \times \dots \times p_m^{a_m}}$$

ex. $1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$

$66 = 2 \times 3 \times 11$

$7 = 7$

- หาจำนวนตัวประกอบที่เป็นบวกทั้งหมดของ n

ถ้า $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \times \dots \times p_n^{a_n}$

n จะมีจำนวนตัวประกอบที่เป็นบวกทั้งสิ้น

$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\dots(a_n+1)$

ex จงหาจำนวนตัวประกอบของ 1200

$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \rightarrow (4+1)(1+1)(2+1)$

pf ตัวประกอบของ n ก็จะอยู่ในรูป

$$m = p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times p_3^{b_3} \times \dots \times p_n^{b_n}$$

โดยที่ $0 \leq b_1 \leq a_1 \rightarrow$ มี a_1+1 ช้อยส์สำหรับ b_1

$0 \leq b_2 \leq a_2 \rightarrow$ มี a_2+1 ช้อยส์สำหรับ b_2

$\vdots$

$0 \leq b_n \leq a_n \rightarrow$ มี a_n+1 ช้อยส์สำหรับ b_n

$\therefore$ มีทั้งหมด $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)$ ตัวประกอบที่เป็นไปได้

ชื่อ-สกุล: Solutions

Theme: จำนวนและการดำเนินการ– คุณสมบัติของจำนวนเต็ม (integers), การหารลงตัว (divisibility), ตัวประกอบ (factors), เลขยกกำลัง (exponential functions)

1. รากที่สามของ $2^{18} - 2^{12} \cdot 3^6 + 2^6 \cdot 3^{11} - 3^{15}$ มีค่าเท่าไร

Solution:
สังเกตว่าชุดตัวเลขด้านบนมีลักษณะคล้ายกับ
$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ ซึ่งเท่ากับ $(x-y)^3$

$2^{18} - 2^{12} \cdot 3^6 + 2^6 \cdot 3^{11} - 3^{15} = (\underbrace{2^6}_{x})^3 - 3 \cdot (\underbrace{2^6}_{x})^2 \cdot (\underbrace{3^5}_{y}) + 3 \cdot (\underbrace{2^6}_{x}) \cdot (\underbrace{3^5}_{y})^2 - (\underbrace{3^5}_{y})^3$

$= (2^6 - 3^5)^3$

$\therefore$ รากที่สาม จึงมีค่าเท่ากับ $2^6 - 3^5 = 64 - 243 = -179$

2. จงหาจำนวนของคู่อันดับของจำนวนเต็ม (x, y) ทั้งหมดที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$x^{2022} + y^2 = 2y$$

Solution:
$x^{2022} + y^2 = 2y$

$x^{2022} + y^2 - 2y = 0$

กำลังสองสมบูรณ์ $\rightarrow x^{2022} + (y-1)^2 - 1 = 0$

$\underbrace{x^{2022}}_{\geq 0} + \underbrace{(y-1)^2}_{\geq 0} = 1$

$\therefore$ $x^{2022} = 0$ และ $(y-1)^2 = 1 \rightarrow (x,y) = (0,0), (0,2)$

หรือ $x^{2022} = 1$ และ $(y-1)^2 = 0 \rightarrow (x,y) = (1,1), (-1,1)$

3. มีจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 24 กี่จำนวน ที่ทำให้ $n!$ หารด้วย $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ ลงตัว

Solution: $1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

เราต้องการหาค่า n ที่ $\frac{n!}{\frac{n(n+1)}{2}}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

$\frac{n!}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2(n-1)!}{n+1}$

$\frac{2 \cdot (n-1)!}{n+1}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ $n+1$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $n+1 \neq 2$
เพราะว่า $n+1 > n-1$ ทำให้ $n+1 \nmid (n-1)!$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า n ต้อง $\neq 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$

$\therefore$ มีจำนวนที่เป็นไปได้ทั้งสิ้น 16 จำนวน

เอกสารจัดเตรียมโดย พี่พลอย นวพรรณ วัฒนาวานิชกูล

4. กำหนดให้ M เป็นตัวคูณร่วมน้อย (ครน.) ของจำนวนนับตั้งแต่ 10 ถึง 30 และให้ N เป็นตัวคูณร่วมน้อย (ครน.) ของ $M, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39,$ และ 40 จงหาค่าของ N/M ?

ทฤษฎีบทมูลฐานของเลขคณิต (fundamental theorem of arithmetic)

Solution:
จำนวนนับใดๆ สามารถเขียนได้ในรูป ผลคูณของจำนวนเฉพาะ

$2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times$

M สามารถเขียนได้ในรูป $M = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 7^{a_4} \cdot 11^{a_5} \cdot 13^{a_6} \cdot 17^{a_7} \cdot 19^{a_8} \cdot 23^{a_9} \cdot 29^{a_{10}}$

$a_1 = 4$ เพราะ 16 เป็นจำนวนที่มี 2 เป็นตัวประกอบมากสุด ในบรรดาเลข 10 - 30

$a_2 = 3$ เพราะ 27 ——— 3 ——— " ———

$a_3 = 2$, $a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = 1$.

$N = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \cdot \ldots \cdot 29^{b_{10}} \cdot 37^{b_{11}}$ → จำนวนเฉพาะที่ใหญ่ที่สุด ที่ ≤ 40

$b_1 = 5$ เพราะ $32 = 2^5$ เป็นจำนวน ที่มี 2 เป็นตัวประกอบ มากสุดในบรรดาเลขเซ็ตใหม่

$b_2 = 3$ เหมือนเดิม

$b_3 = 2$, $b_4 = b_5 = b_6 = \cdots = b_9 = b_{10} = 1$ และ $b_{11} = 1$ $\therefore \dfrac{M}{N} = 2 \times 37 = 74$

5. ให้ $N = 123456789101112\ldots4344$ เป็นจำนวน 79 หลักที่ประกอบด้วยจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 44 เรียงกันตามลำดับ จงหาเศษที่เหลือจากการหาร N ด้วย 45

Solution:
$N = 123456789101112\ldots4344$

ผลบวกเลขโดดของ N = $1+2+\ldots+9$
$+ 1\times10 + 0 + 1 + 2 + \ldots + 9$
$+ 2\times10 + 0 + 1 + 2 + \ldots + 9$
$+ 3\times10 + 0 + 1 + 2 + \ldots + 9$ } หารด้วย 9 ลงตัว
$+ 4\cdot5 + 0 + 1 + \ldots + 4$

$\therefore$ $N \equiv 0 \pmod 9$ → N หารด้วย 45 เหลือเศษ 0, 9, 18, 27, หรือ 36
$N \equiv 4 \pmod 5$ → N " 45 " 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34 หรือ 39

(หรือ $N \equiv 9 \pmod 9$, $N \equiv 9 \pmod 5$ } $N \equiv 9 \pmod{45}$)

N หารด้วย 45 เหลือเศษ 9

6. (Challenging) ค่าของ $22! = 1,124,000,727,777,607,680,000$ มีตัวประกอบที่เป็นบวกมากกว่า $100,000$ จำนวน ถ้าหากเราสุ่มหยิบหนึ่งในบรรดาตัวประกอบออกมา จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวประกอบนั้นจะเป็นจำนวนคี่

Solution:
ให้ x เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $22!$ เราเขียน $x = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot \ldots \cdot 19^{a_8}$

$22!$ มี 2 เป็นตัวประกอบทั้งสิ้น $\left\lfloor \frac{22}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{16} \right\rfloor = 11+5+2+1 = 19$ ตัว

ดังนั้นค่าของ a_1 ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ 0 ถึง 19

ความน่าจะเป็นที่ตัวประกอบตัวหนึ่งจะเป็น คู่ หรือ คี่ ขึ้นอยู่กับค่าของ a_1

ถ้า $a_1 = 0$, x จะเป็นคี่ แต่ถ้า $a_1 = 1, \ldots, 19$ x จะเป็นคู่

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ x เป็นคี่ คือ $\dfrac{1}{20}$
→ $a_1 = 0$
→ ค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ a_1

Notes: