สถิติ & ความน่าจะเป็น

ตัวเลขที่ใช้บรรยายข้อเท็จจริง

(ex) ค่าเฉลี่ย คือ สถิติ , ค่าพิสัย คือ สถิติ , ...

สมมติว่ามีชุดตัวเลข $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
โดยที่ $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots \leq a_n$

① **mean** $= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

② **median** (มัธยฐาน) = ตำแหน่งที่อยู่ตรงกลาง

ex. $\{1, 5, \underline{7}, 9, 13\}$ $\{1, 2, \underline{3, 4}, 5, 6\}$

$\frac{3+4}{2} = 3.5$

③ **mode** (ฐานนิยม) = ตำแหน่งที่ปรากฏมากที่สุด

$\{1, 2, 2, 2, \underline{3}, 3, 3, 3\}$

④ **range** (พิสัย) = จำนวนมากสุด − น้อยสุด $= a_n - a_1$

ความน่าจะเป็น $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ (event / sample space)

Technique ที่ใช้บ่อย : complement !

" ความน่าจะเป็นที่ A จะเกิดขึ้น = 1 − ความน่าจะเป็นที่ A จะไม่เกิดขึ้น "

• example โยนลูกเต๋า 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ 6 อย่างน้อย 1 ครั้ง.

ความน่าจะเป็นออก 6 อย่างน้อย 1 ครั้ง = 1 − ความน่าจะเป็นที่ 6 ไม่ออกเลยทั้ง 3 ครั้ง

$= 1 - \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

combinatorics

nPr := จำนวนวิธีในการเลือกของ r ชิ้นจากของ n ชิ้นที่แตกต่างกัน (โดยที่ลำดับมีผล)

$nPr = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

nCr

$\binom{n}{r}$ n เลือก r := จำนวนวิธีในการเลือกของ r ชิ้นจากของ n ชิ้นที่แตกต่างกัน (โดยไม่สนลำดับ)

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

ของ 6 ชิ้นต่างกัน ต้องการเลือก 2 ชิ้น

$= \binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\cdot 2!} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$

ชื่อ-สกุล: Solutions

Theme: สถิติและความน่าจะเป็น – ค่าเฉลี่ย (mean), ค่ามัธยฐาน (median), ฐานนิยม (mode), ค่าคาดหวัง (expected value), ความน่าจะเป็น (probability)

1. จงหาผลรวมของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้ค่ามัธยฐาน (median) ของ $4, 6, 8, 17,$ และ x มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ย (mean) ของทั้งห้าจำนวน

Solution:

mean $= \frac{4+6+8+17+x}{5} = 7+\frac{x}{5}$

median $=$ mean $= 7+\frac{x}{5}$

median ที่เป็นไปได้คือ 6, 8 หรือ x

- median $= 6 \rightarrow 7+\frac{x}{5} = 6 \rightarrow x = -5$ เช็คว่า 6 เป็น median จริงมั้ย ✓
- median $= 8 \rightarrow 7+\frac{x}{5} = 8 \rightarrow x = 5$ ⟵ 8 ⟶ ✗
- median $= x \rightarrow 7+\frac{x}{5} = x \rightarrow x = 8.75$ ⟵ x ⟶ ✗

∴ ผลรวม x ที่เป็นไปได้ $= -5$ #

2. รายการตอบปัญหารายการหนึ่งมีคำถามทั้งหมด 3 ข้อ และแต่ละข้อมีทั้งหมด 4 ตัวเลือกโดยมีเพียงหนึ่งตัวเลือกที่เป็นคำตอบที่ถูกต้อง ผู้เข้าแข่งขันจะชนะก็ต่อเมื่อตอบถูกอย่างน้อย 2 ข้อ จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าแข่งขันคนหนึ่งจะชนะ

Solution:

ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกในแต่ละข้อ $= 1/4$, ตอบผิด $= 3/4$

ผู้เข้าแข่งขันจะชนะเมื่อตอบถูก

[1] 2 ข้อใน 3 ข้อ — มี $\binom{3}{2} = 3$ วิธีในการเลือก 2 ข้อจาก 3 ข้อ

ความน่าจะเป็น $= \binom{3}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 3 \times \frac{3}{64} = \frac{9}{64}$

[2] ทั้ง 3 ข้อ

$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

ความน่าจะเป็น $\frac{9}{64} + \frac{1}{64} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$

3. จำนวนเต็ม 10 จำนวนเรียงกันมีค่าเฉลี่ย (mean), ฐานนิยม (mode), มัธยฐาน (median) และ พิสัย (range) เท่ากันคือ 10 จงหาจำนวนเต็มที่มากที่สุดในบรรดา 10 จำนวนที่ทำให้ค่าทั้งสี่เป็นจริง

Solution: $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le a_6 \le a_7 \le a_8 \le a_9 \le a_{10}$

ค่าเฉลี่ย $= 10$ แปลว่า ผลรวม $= 100$

มัธยฐาน $= 10$ แปลว่า $\frac{a_5+a_6}{2} = 10 \rightarrow a_5+a_6 = 20$ แปลว่า $a_5 \le 10 \rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \le 10$

$a_6 \ge 10 \rightarrow a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} \ge 10$

พิสัย : $a_{10} - a_1 = 10$

ฐานนิยม $= 10$ แปลว่ามี 10 อย่างน้อย 2 ตัว

เนื่องจากเราต้องการ a_{10} ที่มากที่สุด , a_1 ก็ต้องมากที่สุดที่เป็นไปได้

เพราะ พิสัยของเราเป็นค่าคงที่

เนื่องจาก $a_5 \le 10$ a_1 มากสุดคือ 10, a_{10} มากสุดคือ 20 } แต่กรณีนี้เป็นไปไม่ได้ เพราะ ผลรวมจะเกิน 100

- ลอง $a_{10} = 19$, $a_1 = 9$

ผลรวมที่น้อยสุดที่เป็นไปได้ $= 9+9+9+9+10+10+10+10+10+19 > 100$ เป็นไปไม่ได้

- ลอง $a_{10} = 18$, $a_1 = 8$

$8+8+8+8+10+10+10+10+10+18$ ← จำนวนที่มากสุด

เอกสารจัดเตรียมโดย พี่พลอย นวพรรณ วัฒนาวานิชกูล

4. ในการพยากรณ์อากาศช่วงฤดูฝนของเมืองหนึ่ง พบว่า

   - หากในวันใดวันหนึ่งฝนตกแล้ว ความน่าจะเป็นที่ฝนไม่ตกในวันถัดไปเป็น $8/9$
   - หากในวันใดวันหนึ่งฝนไม่ตกแล้ว ความน่าจะเป็นที่ฝนไม่ตกในวันถัดไปเป็น $1/3$

   ถ้าสัปดาห์นี้ฝนไม่ตกวันอังคาร จงหาความน่าจะเป็นที่ฝนจะไม่ตกทั้งวันพฤหัสบดีและวันศุกร์

Solution:

อังคาร วันพุธ วันพฤหัส วันศุกร์

ไม่ตก → ตก → ไม่ตก → ไม่ตก $\Rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{16}{81}$

ไม่ตก → ไม่ตก → ไม่ตก → ไม่ตก $\Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

$+ = \frac{19}{81}$

5. โนบิตะสุ่มเลือกจำนวนจริงหนึ่งจำนวนจากช่วง $[0,2022]$ ในขณะเดียวกันชิซุกะเลือกก็สุ่มเลือกจำนวนจริงจากช่วง $[0,4044]$ จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนที่ชิซุกะเลือกมีค่ามากกว่าจำนวนที่โนบิตะเลือก

Solution:

กรณี 1 ถ้าชิซุกะเลือกจำนวนในช่วง $[2022, 4044]$ ไม่ว่าโนบิตะจะเลือกจำนวนอะไร ก็จะน้อยกว่าชิซุกะเสมอ

→ ความน่าจะเป็นในกรณีนี้ = ความน่าจะเป็นที่ชิซุกะเลือกจำนวนในช่วง $[2022, 4044]$ จากทั้งช่วง $[0,4044] = \frac{1}{2}$

กรณี 2 ถ้าชิซุกะเลือกจำนวนในช่วง $[0,2022]$ อย่าลืมว่าโนบิตะก็เลือกจำนวนจากช่วงเดียวกัน โดยอาศัยความสมมาตรโอกาสที่จำนวนของชิซุกะ > โนบิตะ $= \frac{1}{2}$

∴ ความน่าจะเป็นในกรณีนี้ = ความน่าจะเป็นที่ชิซุกะเลือกจากช่วง $[0,2022] \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

∴ ความน่าจะเป็นรวม $= \frac{3}{4}$

6. (challenging) A, B และ C เล่นเกมโดยการโยนเหรียญหัวก้อย กติกามีอยู่ว่าให้แต่ละคนโยนไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้หัว และถ้าหากได้หัวแล้วให้หยุดเล่น จงหาความน่าจะเป็นที่ทั้งสามคนโยนได้หัวโดยใช้จำนวนครั้งเท่ากัน

Solution:

กรณี 1

	1
A	ห
B	ห
C	ห

→ ความน่าจะเป็น $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

กรณี 2

	1	2
A	ก	ห
B	ก	ห
C	ก	ห

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$

กรณี 3

	1	2	3
A	ก	ก	ห
B	ก	ก	ห
C	ก	ก	ห

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \cdots$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right)$

$= \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{7} = \frac{1}{7}$

Notes: