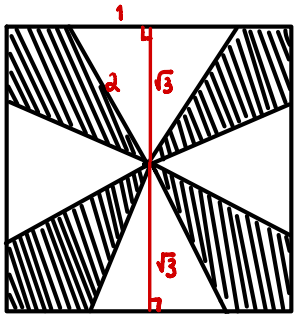
ชื่อ-สกุล: Solutions

**Theme: เรขาคณิต** – ความคล้าย ความเท่ากันทุกประการ ตรีโกณ วงกลม พีทาโกรัส เรขาคณิตวิเคราะห์ เช่น ภาคตัดกรวย เรขาคณิตบนระบบพิกัด (coordinate system)

1. รูปด้านล่างที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและสามเหลี่ยมด้านเท่าสี่รูป โดยที่แต่ละด้านของสามเหลี่ยมมีความยาว 2 หน่วยและจุดยอดของทุกสามเหลี่ยมพบกันที่ตรงกลางของสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงหาพื้นที่ที่แรเงา

Solution:

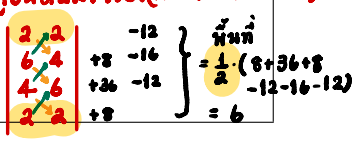



พื้นที่ □ $= (2\sqrt{3})^2 = 12$

พื้นที่ Δ แต่ละรูป $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$

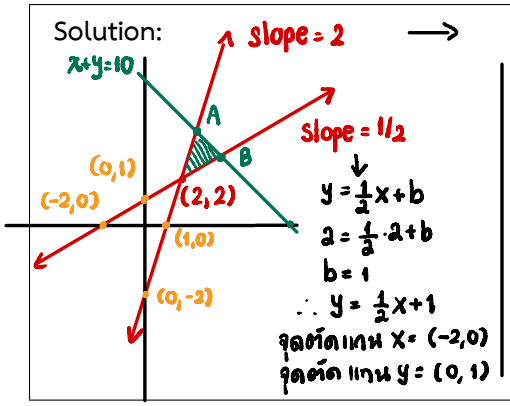
พื้นที่แรเงา $= 12 - 4\sqrt{3}$

หาพื้นที่ Δ โดยใช้ matrix (ใช้ได้กับทุกรูปทรง)
นำคู่อันดับมาเรียง(ทวนเข็มนาฬิกา)




2. เส้นตรงสองเส้นมีความชัน $1/2$ และ $2$ ตัดกันที่จุด $(2, 2)$ จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่ปิดล้อมโดยเส้นตรงสองเส้นนี้ และเส้นตรง $x + y = 10$

Solution:




$y = mx + b$
$y = 2x + b$
$(2,2)$ อยู่บนเส้นตรงนี้
$\therefore \quad 2 = 2 \cdot 2 + b$
$b = -2$
$y = 2x - 2$
จุดตัดแกน $x = (1,0)$
จุดตัดแกน $y = (0,-2)$

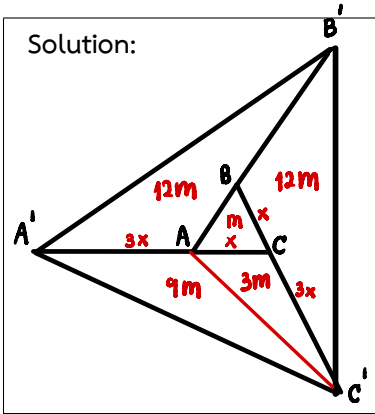
slope $= 1/2$
$y = \frac{1}{2}x + b$
$2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$
$b = 1$
$\therefore y = \frac{1}{2}x + 1$
จุดตัดแกน $x = (-2,0)$
จุดตัดแกน $y = (0,1)$

A: จุดตัดระหว่าง $y = 2x - 2$ กับ $x + y = 10 \rightarrow (x,y) = (4,6)$
B: จุดตัดระหว่าง $y = \frac{x}{2} + 1$ กับ $x + y = 10 \rightarrow (x,y) = (6,4)$

$h = \sqrt{20 - 2} = 3\sqrt{2}$
$[\Delta] = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}$
$= 6$

3. ให้ $ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า ทำการต่อด้าน $\overline{AB}$ ออกไปทางด้าน $B$ ไปจนถึง $B'$ จนได้ $BB' = 3 \cdot AB$ ในทำนองเดียวกันเราต่อด้าน $\overline{BC}$ ออกไปทางด้าน $C$ ไปจนถึง $C'$ จนได้ $CC' = 3 \cdot BC$ และ ต่อด้าน $\overline{CA}$ ออกไปทางด้าน $A$ ไปจนถึง $A'$ จนได้ $AA' = 3 \cdot CA$ จงหาอัตราส่วน $[\Delta A'B'C'] : [\Delta ABC]$

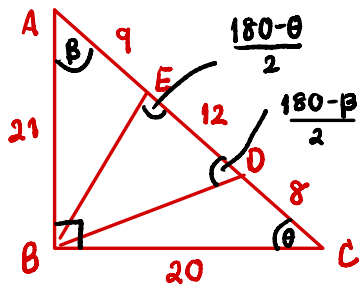
Solution:




ให้ $[\Delta ABC] = m$
$[\Delta ABC] : [\Delta ACC'] = BC : CC' = 1:3$
$\therefore [\Delta ACC'] = 3m$
$[\Delta ACC'] : [\Delta A'AC'] = AC : A'A = 1:3$
$\therefore [\Delta A'AC'] = 9m \rightarrow \therefore [\Delta A'CC'] = 12m$
ในทำนองเดียวกัน
$[\Delta BB'C] = [\Delta A'AB'] = 12m$
$\therefore [\Delta A'B'C'] = 12m + 12m + 12m + m = 37m$
$[\Delta A'B'C'] : [\Delta ABC] = 37:1$

4. รูปสามเหลี่ยม $ABC$ มี $AB = 21, BC = 20$ มี $D, E$ เป็นจุดบนด้าน $CA$ ที่ทำให้ $CD = 8, DE = 12,$ และ $EA = 9$ จงหาขนาดของมุม $\angle DBE$

Solution:




$AB=21, BC=20, AC=29$

สังเกตว่า $AB^2+BC^2 = 441+400 = 841 = 29^2 = AC^2$

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$

$\Delta BCE$ และ $\Delta ABD$ เป็น $\Delta$ หน้าจั่ว

ให้ $\angle BAD = \beta$ และ $\angle ECB = \theta$

$\Delta ABD$ : $\angle ADB = \frac{180-\beta}{2}$

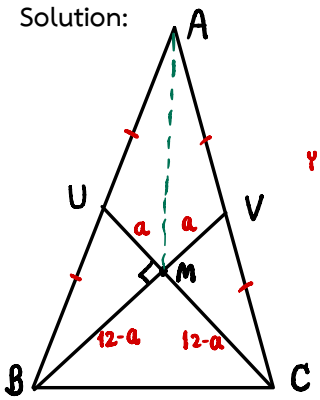
$\Delta BCE$ : $\angle BEC = \frac{180-\theta}{2}$

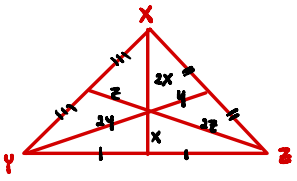
$\Delta BED$: $\angle DBE = 180 - \left(\frac{180-\beta}{2}\right) - \left(\frac{180-\theta}{2}\right)$

$= \frac{\beta+\theta}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

5. $\Delta ABC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ $AB = AC$ หากเส้นมัธยฐาน $\overline{BV}$ และ $\overline{CU}$ ตั้งฉากกัน และ $BV = CU = 12$ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม $ABC$

Solution:




$\Delta XYZ$ ใดๆ เส้นมัธยฐานทั้ง 3 เส้น จะตัดกันที่จุดๆ เดียวเสมอ และจะแบ่งเส้นมัธยฐานในอัตราส่วน 1:2 (ดังรูปซ้ายมือ)

$\therefore \frac{UM}{MC} = \frac{1}{2}$

$\frac{a}{12-a} = \frac{1}{2}$

$a = 4$

$[\Delta BMC] = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8 = 32$

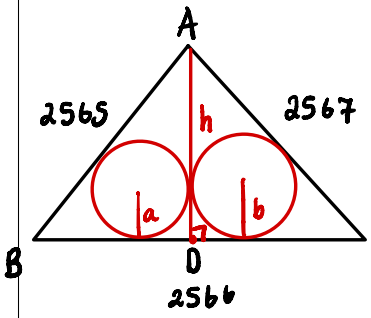
$[\Delta BMU] = [\Delta UMA] = [\Delta AMV]$

$= [\Delta MVC] = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8 = 16$

$\therefore [\Delta ABC] = 96$

6. $ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $AB = 2565, BC = 2566, AC = 2567$ และ $D$ เป็นจุดบน $BC$ ที่ทำให้ $AD \perp BC$ วงกลม $O$ รัศมี $a$ แนบในรูปสามเหลี่ยม $ABD$ วงกลม $P$ รัศมี $b$ แนบในรูปสามเหลี่ยม $ACD$ ถ้า $b-a = \frac{m}{n}$ โดยที่ $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $m+n$ มีค่าน้อยสุดเท่าใด

Solution:




ให้ $AD = h$

$\Delta ABD$: $BD^2 = 2565^2 - h^2$ —(1)

$\Delta ADC$: $DC^2 = 2567^2 - h^2$ —(2)

$\therefore$ (2)-(1): $DC^2 - BD^2 = 2567^2 - 2565^2 = 2\cdot(2567+2565)$

$= 4\cdot 2566$ — (3)

เรารู้ว่า $DC+BD = 2566$

$\therefore DC = 2566 - BD$

(3): $(2566-BD)^2 - BD^2 = 4\cdot 2566$

$2566^2 - 2\cdot BD\cdot 2566 = 4\cdot 2566$

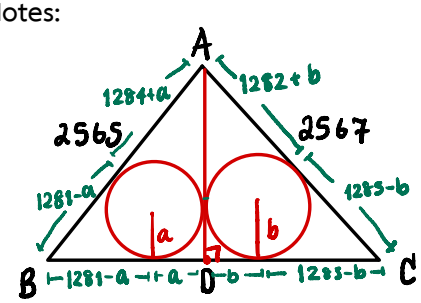
$2566^2 - 4\cdot 2566 = 2BD\cdot 2566$

$2BD = 2562$

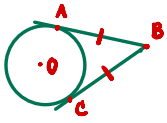
$BD = 1281$

$\therefore CD = 1285$

Notes:




ไล่หาความยาวแต่ละส่วนดังรูป โดยใช้ fact ที่ว่า




$AB = BC$

$h = 1284+a+a$

$h = 1282+b+b$

$0 = 2+(2a-2b) \rightarrow b-a = 1$