เอกสารประกอบการอบรมในโครงการติว สอวน. ประจำปี พ.ศ.2565 โรงเรียนเบ็ญจะมะมหาราช
เวลา 7:30-8:30 วันที่ 7 กรกฎาคม 2565

ชื่อ-สกุล: Solutions

Theme: พีชคณิต –ได้แก่ การแก้ระบบสมการ (และอสมการ) ตัวแปรเดียวและหลายตัวแปร การแยกตัวประกอบของพหุนาม ความสัมพันธ์ของรากและสัมประสิทธิ์

1. x และ y เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $x^2 + y^2 = 10x - 6y - 34$. จงหาค่าของ $x + y$?

Solution:

ทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$x^2+y^2 = 10x-6y-34$$
$$x^2-10x+y^2-6y+34=0$$
$$(x^2-10x+25)+(y^2-6y+9)=0$$
$$\underbrace{(x-5)^2}_{0}+\underbrace{(y-3)^2}_{0}=0$$
$\therefore\ x=5 \quad y=3 \Rightarrow x+y = 8.$

2. แท็กซี่ขับรถจากบ้านไปสนามบินเพื่อที่จะให้ทันขึ้นเครื่องบิน ในชั่วโมงแรกเขาขับด้วยอัตราเร็ว 35 กม/ชม แต่ก็ตระหนักได้ว่าถ้ายังขับรถด้วยอัตราเร็วเท่านี้ต่อไปจะไปถึงสนามบินช้ากว่าที่กำหนดไป 1 ชั่วโมง เขาจึงขับด้วยอัตราเร็วที่มากกว่าเดิม 15 กม/ชม ตลอดระยะทางที่เหลือ ทำให้ถึงเร็วกว่ากำหนดไป 30 นาที จงหาระยะทางจากบ้านไปสนามบิน

Solution:

1 ชม

บ้าน สนามบิน

←35 กม.→← x กม.→

สมมติว่า เราต้องไปถึงสนามบินในเวลา t ชม.

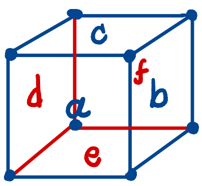
- วิ่ง 35 กม/ชม จะเลท 1 ชม. $\Rightarrow \frac{x}{35}+1 = t+1 \rightarrow x=35t$ —①
- วิ่ง 50 กม./ชม ในระยะทางที่เหลือ จะไปถึงก่อน ครึ่ง ชม. $\Rightarrow \frac{x}{50}+1 = t-\frac{1}{2} \rightarrow x=50t-75$ —②

①-② : $0=-15t+75 \rightarrow t=5$

ระยะทางรวม = $35+5\cdot 35 = 210$ กม.

3. ตัวเลข 2, 3, 4, 5, 6, 7 ถูกเขียนอยู่บนหน้าลูกเต๋าหกหน้า หน้าละหนึ่งจำนวน นอกจากนั้นที่แต่ละมุมในแปดมุมของลูกเต๋าเราทำการคำนวณผลคูณของหน้าลูกเต๋าสามหน้าที่บรรจบกันและเขียนผลคูณไว้ที่มุมๆนั้น จงหาผลรวมของตัวเลขจากทั้งแปดมุมที่มากที่สุดที่เป็นไปได้

Solution:



สมมติให้ด้านทั้งหกเป็น a, b, c, d, e, f ก่อน

จะได้ว่า ทั้ง 8 มุม เป็นเลข

$abc, abe, ade, acd, bef, bcf, cdf, def$

$\therefore$ ผลรวม $= abc+abe+ade+acd+bef+bcf+cdf+def$
$= a(bc+be+de+cd)+f(be+bc+cd+de)$
$= (a+e)(bc+be+de+cd)$
$= (a+e)(b(c+e)+d(e+c))$
$= (a+e)(b+d)(c+e)$ → ต้องการมากสุดที่เป็นไปได้

ทุกพจน์จะต้องมีค่าพอๆ กัน

$\therefore$ เราจึงให้ $a+e=2+7=9$, $b+d=3+6=9$, $c+e=4+5=9$ ผลคูณ $=729$

4. ให้ $x^3-19x+12=(x-a)(x-b)(x-c)$ เมื่อ $a,b,$ และ c เป็นค่าคงที่ จงหาค่าของ $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)$

Solution: ถ้าเราพยายามหารากตรงๆ ข้อนี้จะยากมาก
เราจะใช้ความสัมพันธ์ราก และ สัมประสิทธิ์ แทน

$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc$

$\therefore \quad a+b+c=0 \quad — (1)$

$ab+bc+ac=-19 \quad — (2)$

$abc=-12 \quad — (3)$

ต้องการหา $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) = 1-(a^2+b^2+c^2)+(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-a^2b^2c^2 \quad — (*)$

$a^2+b^2+c^2 = (1)^2-2(2) = 0^2-2\cdot(-19) = 38$

$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 = (ab+bc+ac)^2-2abc(a+b+c) = (-19)^2-2\cdot(-12)\cdot 0 = 361$

$a^2b^2c^2 = 144 \qquad \therefore (*) = 1-38+361-144 = 362-182 = 180$

5. มีจำนวนเต็ม $a,b,$ และ c ที่มากกว่า 1 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\sqrt[a]{N\sqrt[b]{N\sqrt[c]{N}}}=\sqrt[36]{N^{25}}$$

สำหรับทุก $N\neq 1$ จงหาค่าของ b

ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

Solution:

$\sqrt[a]{N\sqrt[b]{N\sqrt[c]{N}}}$

$=\sqrt[a]{N\sqrt[b]{N\cdot N^{1/c}}}$

$=\sqrt[a]{N\sqrt[b]{N^{1+\frac{1}{c}}}}$

$=\sqrt[a]{N\cdot N^{\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}}}$

$=\sqrt[a]{N^{1+\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}}}$

$=N^{\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}}$

$\therefore \quad N^{\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}} = N^{\frac{25}{36}}$

สังเกตว่าถ้า $a\geq 3$ (เรารู้ว่า $a,b,c\geq 2$ หรือก็คือ $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\leq\frac{1}{2}$)

$\frac{1}{a}\leq\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\leq\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{abc}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\leq\frac{1}{12}$

$\therefore \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}<\frac{25}{36}$ เป็นไปไม่ได้

$\therefore \quad a=2$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2bc}=\frac{25}{36}$

$\frac{1}{2b}+\frac{1}{2bc}=\frac{7}{36}$

$\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}=\frac{7}{18}$

$b=3, \quad c=2$

6. (Challenging) กำหนดให้

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{1^4+1^2+1}+\frac{2}{2^4+2^2+1}+\frac{3}{3^4+3^2+1}+\ldots+\frac{100}{100^4+100^2+1} \quad — (*)$$

Telescoping นึกถึงโจทย์พวก $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ค่าที่น้อยที่สุดของ $a+b$ เป็นเท่าใด

Solution:

$\frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{n}{(n^4+2n^2+1)-n^2}$

พยายามทำให้อยู่ในรูปกำลัง 2 สมบูรณ์

$=\frac{n}{(n^2+1)^2-n^2}$

$=\frac{n}{(n^2-n+1)(n^2+n+1)}$ ผลลบ $=2n$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{(n^2-n+1)(n^2+n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

สังเกตว่า $n^2+n+1=(n+1)^2-(n+1)+1$

$(*)$: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2-1+1}-\frac{1}{1^2+1+1}+\frac{1}{2^2-2+1}-\frac{1}{2^2+2+1}+\frac{1}{3^2-3+1}-\frac{1}{3^2+3+1}+\ldots-\frac{1}{100^2+100+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{10101}\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{10100}{10101}=\frac{5050}{10101}$

Notes: