

ชื่อ-สกุล: **Solutions**

Theme: Combinatorics หลักการนับเบื้องต้น, โจทย์ปัญหาเขาวัว – การนับ การจัดกลุ่ม, หลักรังนกพิราบ (pigeon hole principle), หลักเพิ่มเข้าตัดออก (principle of inclusion and exclusion)

- พิจารณาตารางด้านล่าง มีช่องสามช่องที่ถูกแรเงาไว้แล้วดังรูป จงหาว่าต้องแรเงาอย่างน้อยที่สุดอีกกี่ช่อง ตารางนี้จึงจะมี แถบสมมาตร 2 แถบ

Solution:

สี่เหลี่ยมมุมฉาก (ไม่ใช่จัตุรัส) มี แถบ สมมาตร  
เพียง 2 แถบ คือ แถบตัว และ แถบ หอน  
เราจำเป็นต้องระบายเพิ่มอย่างน้อย 7 ช่อง

- มีนากับเมษาเล่นเกมกัน โดยกติกาของเกมมีดังนี้ มีนาจะเลือกจำนวนนับหนึ่งจำนวนในช่วงตั้งแต่ 0 ถึง 999 คุณจำนวนนั้นด้วย 2 และส่งต่อให้เมษา เมื่อเมษาได้รับ เมษาก็จะบวกจำนวนที่ได้รับด้วย 50 แล้วส่งกลับไปให้มีนา ทั้งสองคนทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ คนที่ชนะคือคนสุดท้ายที่ผลิตตัวเลขที่มีค่าน้อยกว่า 1000 ถ้าให้  $N$  เป็นจำนวนเริ่มต้นที่น้อยที่สุดที่ทำให้มีนาเป็นผู้ชนะ จงหาผลบวกเลขโดดของ  $N$

Solution:

มีนา    เมษา                    มีนา                    เมษา                    มีนา                    เมษา                    มีนา

$$N \rightarrow 2N \rightarrow 2N+50 \rightarrow 4N+100 \rightarrow 4N+150 \rightarrow 8N+300 \rightarrow 8N+350 \rightarrow 16N+700$$

เพราะว่าเราอยากได้  $N$  ที่น้อยที่สุด แปลว่า เราอยากในทั้ง 2 คน ผลลัพธ์ เล่นในนาหนที่สุดเท่าที่ทำได้ เนื่องจากว่า ถ้ามีนาไม่ชนะตาที่ผลิต  $16N+700$  ตาถัดไปของมีนา จะผลิต  $2(16N+700+50) > 1000$  ซึ่งเป็นไปไม่ได้

$\therefore$  มีนาต้องชนะที่ตาที่  $\Rightarrow$  แปลว่า  $16N+700+50$  จะต้องเกิน 1000

$$\therefore 16N+700 > 950 \quad \text{และ} \quad 16N+700 < 1000$$

$$\therefore 300 < 16N < 300 \rightarrow N \text{ น้อยสุด} = 16$$

ผลรวมเลขโดด = 7

- ให้  $X = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  จงหาจำนวนสับเซต  $\{a, b\}$  ของ  $X$  โดยที่  $a < b$  และ  $a \cdot b$  เป็นพหุคูณของ 5

Solution:

$X = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$

จำนวน subsets  $\{a, b\}$  ที่  $5 | ab$

= จำนวน subsets  $\{a, b\}$  ทั้งหมด - จำนวน subsets  $\{a, b\}$  ที่  $5 \nmid ab$   
(ทั้ง  $a$  และ  $b$  หารด้วย 5 ไม่ลงตัว)

จำนวน 1-1000 ที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว  
=  $\frac{4}{5} \times 1000 = 800$

$$= \binom{1000}{2} - \binom{800}{2}$$

$$= \frac{1000 \cdot 999}{2} - \frac{800 \cdot 799}{2}$$

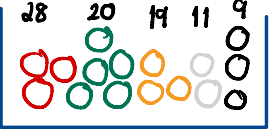
$$= 500 \cdot 999 - 400 \cdot 799$$

$$= 499,500 - 319,600$$

$$= 179,900 \quad \#$$

4. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 28 ลูก สีเขียว 20 ลูก สีเหลือง 19 ลูก สีขาว 11 ลูก และสีดำ 9 ลูก จงหาจำนวนลูกบอลที่น้อยที่สุดที่ต้องหยิบออกมาที่ทำให้เรามั่นใจว่าจะมีลูกบอลอย่างน้อย 15 ลูก ที่มีสีเหมือนกันหมด

Solution:



**คิดถึง worse-case scenerio (กรณีที่โชคร้ายที่สุด)**

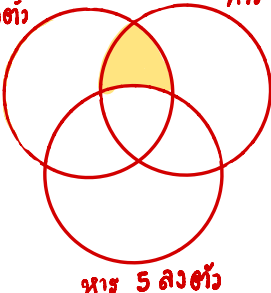
- หยิบสีดำได้ทั้ง 9 ลูก + สีขาว 11 ลูก
- สีแดง 14 ลูก
- สีเขียว 14 ลูก
- สีเหลือง 14 ลูก


+ 1 ลูก ซึ่งจะมาจากแดง/เขียว/เหลือง

$$9 + 11 + 14 + 14 + 14 + 1 = 63 \text{ ลูก}$$

5. มีจำนวนนับที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 2022 ทั้งหมดกี่จำนวนที่หารด้วย 3 และ 4 ลงตัวแต่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว

Solution:



$$\left\lfloor \frac{2022}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2022}{60} \right\rfloor = 168 - 33 = 135$$


6. (Challenging) ฟ้าเล่นเกมทายวันเกิดของส้มในเดือนกันยายนซึ่งเป็นเดือนเกิดของส้มพอดี ถ้าฟ้าทายวันที่เกิดของส้มถูก ส้มจะให้ของขวัญกับฟ้า ซึ่งในเดือนกันยายน ส้มจะพูดความจริงในวันที่ตรงกับวันเกิดของเท่านั้น และโกหกในวันอื่น ๆ ทั้งหมด โดยส้มพูดกับฟ้าในช่วง 3 วันที่ติดต่อกันในเดือนกันยายน ดังนี้
- ↓ แปลว่า 3 วันเดียวที่ ส้มพูดจริง**

- (1) — • วันแรก ส้มพูดว่า “ฉันพูดโกหกในวันที่ 7, 11, 14, 18, 20, 23, 26 และ 29”
- (2) — • วันต่อมา ส้มพูดว่า “วันนี้เป็นวันที่ 6, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 28 หรือ 29”
- (3) — • และวันสุดท้าย ส้มพูดว่า “ฉันพูดโกหกในวันที่ 5, 10, 13, 16, 17, 22, 25 และ 28”

จากข้อมูลที่ให้มา วันเกิดของส้มคือวันที่เท่าไรในเดือนกันยายน

Solution: เราต้อง หิวางหา เป็นกรณีๆ ไป

Case 1 • ส้มโกหกทั้ง 3 วัน → (1) และ (3) บอกเราว่า ส้มพูดจริง วันหนึ่งใน set {7, 11, 14, 18, 20, 23, 26, 29}

Case 2 • ส้มโกหก วันที่ 1 และ 3 → เหตุผลเดียวกัน กับกรณีแรกทำในกรณีนี้ เป็นไปไม่ได้  $\cap \{5, 10, 13, 16, 17, 22, 25, 28\} = \emptyset$  ซึ่งเป็นไปไม่ได้

Case 3 • ส้มโกหก วันที่ 1 และ 2

(1) แปลว่า วันเกิดส้มอยู่ใน set {7, 11, 14, 18, 20, 23, 26, 29}

(2) แปลว่า วันที่ ไม่ใช่ 6, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 28 และ 29 เนื่องจากวันที่ถูกไป เป็นวันเกิดส้ม (เพราะ ส้มพูดจริง) ทำให้เรารู้ว่า วันเกิดส้มไม่ใช่ 7, 11, 12, 14, 15, 18, 19, 23, 24, 26, 27, 29 และ 30.

(3) แปลว่า วันเกิด ส้ม ไม่ใช่ 5, 10, 13, 16, 17, 22, 25 หรือ 28

เมื่อนำมารวมกันจะได้ว่า ส้มเกิด วันที่ 20

Notes:

- Case 4 • ส้มโกหก วันที่ 2 และ 3 → เป็นไปไม่ได้, ลองคิด แบบกรณี ที่ 3 ดู ☺