

ชื่อ-สกุล: **Solutions**

โจทย์ปัญหาทั้งหมด 5 ข้อ ไม่ได้เรียงตามความยากง่าย สามารถเลือกทำข้อไหนก่อนก็ได้

1.  $ABCD$  เป็นสี่เหลี่ยมคางหมูที่  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$  จุด  $E$  เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน  $\overline{BC}$  และ  $F$  เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน  $\overline{DA}$  ถ้าพื้นที่ของ  $ABEF$  เป็นสองเท่าของพื้นที่  $FECD$  จงหาค่าของ  $AB/DC$

Solution:

เราสามารถ prove ได้ไม่ยากว่า  $FE = \frac{DC+AB}{2}$   
 ให้  $DC = m, AB = n \Rightarrow FE = \frac{m+n}{2}$   
 ต่อด้าน  $\overline{AD}$  และ  $\overline{BC}$  ออกไปจนพบกันที่  $O$  ดังรูป  
 $\Delta OCD \sim \Delta OEF \sim \Delta OBA$   
 $[OCD] : [OEF] : [OBA] = CD^2 : FE^2 : AB^2 = m^2 : (\frac{m+n}{2})^2 : n^2$   
 $\therefore [ABEF] : [FECD] = n^2 - (\frac{m+n}{2})^2 : (\frac{m+n}{2})^2 - m^2 = 2:1$   
 $\therefore n^2 - (\frac{m+n}{2})^2 = 2 \cdot [(\frac{m+n}{2})^2 - m^2]$   
 $3n^2 - 2mn - m^2 = -6m^2 + 4mn + 2n^2$   
 $0 = 7m^2 + 6mn - n^2 = (7m-n)(m+n) \Rightarrow 7m = n$   
 $\frac{n}{m} = 7$

2. พิจารณาพหุนาม  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ให้  $M$  เป็นค่าเฉลี่ยของรากทั้งหมดของพหุนามนี้  $N$  เป็นผลคูณของรากทั้งหมด และ  $K$  เป็นผลรวมของสัมประสิทธิ์ ถ้า  $M = N = K$  และจุดตัดแกน  $y$  ของ กราฟ  $y = p(x)$  เป็น 2 จงหาค่าของ  $b$

Solution:  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$   
 โดยความสัมพันธ์ของรากและสัมประสิทธิ์  
 $-a = \text{ผลบวกราก}$   
 $-c = \text{ผลคูณราก}$

Proof:  $\begin{cases} p(x) = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) \\ = x^3 - (r_1+r_2+r_3)x^2 \\ + (r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)x - r_1r_2r_3 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} M = -\frac{a}{3} \\ N = -c \\ K = 1+a+b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M=N=K \\ a = 3c \\ b = -5c-1 \end{cases}$

จุดตัดแกน  $y$  ของกราฟ  $y = p(x)$   
 คือจุดที่  $x=0 \Rightarrow \therefore p(0) = a$   
 $\therefore 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2$   
 $\Rightarrow c = 2$   
 ดังนั้น  $b = -11$

3. จงหาว่ามีวิธีในการทาสีตัวเลข 2, ..., 9 ด้วยสีแดง เหลือง หรือ เขียว ทั้งหมดกี่วิธี ถ้าเราต้องการให้สีของตัวเลขแต่ละตัว แตกต่างจากสีของตัวประกอบของตัวเลขนั้น (ตัวประกอบในที่นี้หมายถึงตัวประกอบทั้งหมดยกเว้นตัวมันเอง)

Solution: แดง / เหลือง / เขียว 2 3 4 5 6 7 8 9

① • 2, 4, 8 ต้องมีสีต่างกัน  
 ② • 3, 9 ต้องมีสีต่างกัน  
 ③ • สีของ 2 และ 3 บังคับให้ 6 เป็นหนึ่งในสีที่เหลือ  
 ④ • สีของ 5 และ 7 เป็นอิสระกันได้  
 เรือนไขที่ ③ ทำให้เราต้องแยกเป็น 2 กรณี

I: 2 และ 3 สีเดียวกัน  $\rightarrow 3$  วิธี  $\times \begin{matrix} 2 \\ (4,8) \end{matrix} \times \begin{matrix} 2 \\ (9) \end{matrix} \times \begin{matrix} 3 \\ (5) \end{matrix} \times \begin{matrix} 3 \\ (7) \end{matrix} \times \begin{matrix} 2 \\ (6) \end{matrix}$

II: 2 และ 3 สีต่างกัน  $\rightarrow 6$  วิธี  $\times \begin{matrix} 2 \\ (4,8) \end{matrix} \times \begin{matrix} 2 \\ (9) \end{matrix} \times \begin{matrix} 3 \\ (5) \end{matrix} \times \begin{matrix} 3 \\ (7) \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ (6) \end{matrix}$

$\left. \begin{matrix} 3 \\ 6 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 216+216 \\ = 432 \end{matrix}$  วิธี

4. ให้  $x$  เป็นจำนวนจริงที่ทำให้

$$\sqrt{49 - x^2} - \sqrt{25 - x^2} = 3 \quad \text{--- (1)}$$

จงหาค่าของ  $\sqrt{49 - x^2} + \sqrt{25 - x^2}$

Solution: ให้  $\sqrt{49 - x^2} + \sqrt{25 - x^2} = m \quad \text{--- (2)}$

$$(1) \cdot (2) : (\sqrt{49 - x^2} - \sqrt{25 - x^2})(\sqrt{49 - x^2} + \sqrt{25 - x^2}) = 3m$$

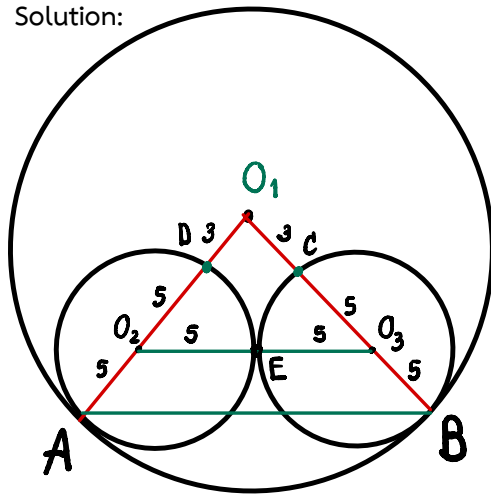
$$((49 - x^2) - (25 - x^2)) = 3m$$

$$24 = 3m$$

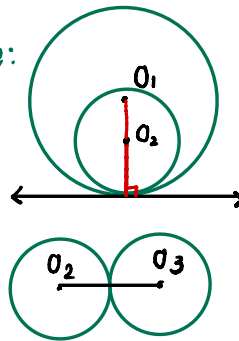
$$m = 8$$

5. วงกลมสองวงที่มีรัศมี 5 นิ้วสัมผัสกันภายนอก และทั้งสองวงสัมผัสภายในกับวงกลมที่มีรัศมี 13 นิ้ว ที่จุด  $A$  และ  $B$  ถ้า  $AB = m/n$  โดยที่  $m/n$  อยู่ในรูปของเศษส่วนอย่างต่ำ จงหาค่าของ  $m + n$

Solution:



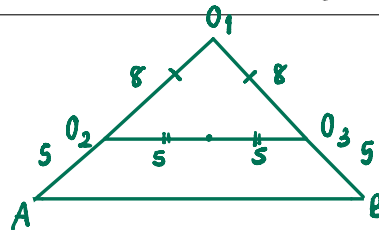
Note:



ถ้าวงกลมสองวงสัมผัสกันภายใน (หรือภายนอกก็ได้) จุดศูนย์กลางของวงเล็ก/วงในอยู่และจุดสัมผัสอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ดังนั้น  $AO_2 = O_2D = 5$  ทำให้  $DO_1 = 3$   
 $BO_3 = O_3C = 5$  ทำให้  $CO_1 = 3$   
 $O_2E = EO_3 = 5$

Notes:



$$\triangle O_1O_2O_3 \sim \triangle O_1AB$$

$$\therefore \frac{O_1O_2}{O_1A} = \frac{O_2O_3}{AB}$$

$$\frac{8}{13} = \frac{10}{AB}$$

$$AB = \frac{130}{8} = \frac{65}{4}$$

$$A+B = 69$$