ชื่อ-สกุล: Solutions

โจทย์ปัญหามีทั้งหมด 5 ข้อ ไม่ได้เรียงตามความยากง่าย สามารถเลือกทำข้อไหนก่อนก็ได้

1. จงหาค่าที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2022$ เมื่อกำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง

Solution:

$(x+1)(x+4)\cdot(x+2)(x+3)+2022$

$=(x^2+5x+4)\cdot(x^2+5x+6)+2022$

$=(x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1)+2022$

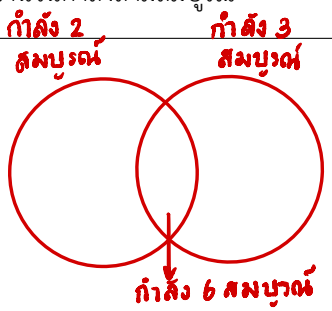
$=(x^2+5x+5)^2-1+2022$

$=(x^2+5x+5)^2+2021$ → ∴ ค่าต่ำสุด = 2021

มี $x\in\mathbb{R}$ ที่ทำให้ $x^2+5x+5=0$ $\left(x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot5}}{2}\right)$

2. มีตัวหารบวกของ 201^9 ทั้งหมดกี่จำนวนที่เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ หรือ จำนวนกำลังสามสมบูรณ์

Solution:



$201^9=(3\cdot67)^9=3^9\cdot67^9$

|จำนวนที่เป็นกำลัง 2 หรือ 3|

= |จำนวนที่เป็นกำลัง 2| + |กำลัง 3| − |กำลัง 6|

$=5\cdot5+4\cdot4-2\cdot2$ → degree ของ 3 และ 5 เป็น 0 หรือ 6

degree ของ 3 เป็น 0, 2, 4, 6, หรือ 8

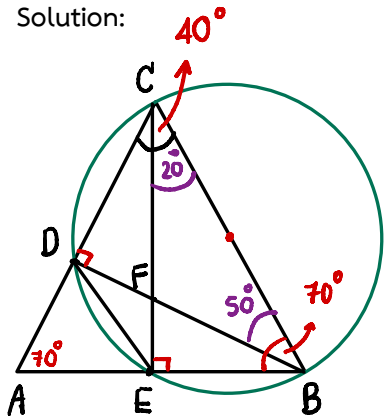
degree ของ 5 เป็น 0, 2, 4, 6, 8

degree ของ 3 และ 5 เป็น 0, 3, 6, 9

$=25+16-4=37$

3. ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ $BC=AC$ และ $\angle ACB=40^\circ$ สร้างวงกลมที่มี $\overline{BC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ให้ D และ E เป็นจุดตัดของวงกลมที่เพิ่งสร้างกับด้าน $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ ให้ F เป็นจุดตัดระหว่างเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยม $BCDE$ จงหาขนาดของมุม $\angle BFC$

Solution:



ΔABC เป็น Δ หน้าจั่ว $\angle CAB=\angle CBA=70^\circ$

BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ∴ ΔBCE และ ΔBDC เป็น Δ มุมฉาก ที่ $\angle BEC=\angle BDC=90^\circ$

ΔBEC : เอารู้ $\angle CBE=70^\circ$, $\angle BEC=90^\circ$

∴ $\angle ECB=180^\circ-70^\circ-90^\circ=20^\circ$

ΔBCD : เอารู้ $\angle DCB=40^\circ$, $\angle CDB=90^\circ$

∴ $\angle CBD=180^\circ-40^\circ-90^\circ=50^\circ$

ΔBCF : $\angle BFC=180^\circ-\angle ECB-\angle CBD$

$=180^\circ-20^\circ-50^\circ=110^\circ$

4. ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ $y^2 + 2x^2y^2 = 96x^2 + 864$ จงหาค่าของ $x^2 + y^2$

Solution:

$y^2+2x^2y^2 = 96x^2+864$

ให้ $x^2 = a$ และ $y^2 = b \Rightarrow a, b \geq 0$

$b + 2ab = 96a + 864$

$2ab + b - 96a - 864 = 0$

$(2a+1)(b-48) + 48 - 864 = 0$

$(2a+1)(b-48) = 816 = 3 \times 17 \times 16$

เป็นจำนวนคี่

$\therefore$ $2a+1 = 1, 3, 17$ หรือ 51

แต่ $a = x^2 \therefore 2a+1 = 1$ หรือ 51 $(x \neq 0$ หรือ $5)$

- ถ้า $2a+1 = 1$
  $\rightarrow b-48 = 816$
  $b = 864 \rightarrow$ ไม่เป็นคำตอบ 2 สมบูรณ์
- ถ้า $2a+1 = 51$
  $\rightarrow b-48 = 16$
  $b = 64 \rightarrow y = 8$

$\therefore x^2+y^2 = a+b = 25+64 = 89$

5. ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่มีตัวประกอบเฉพาะเป็น 2, 3 หรือ 5 เท่านั้น ผลรวมของส่วนกลับของสมาชิกทั้งหมดของ A คือ

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\cdots$$

ถ้าผลรวมนี้เท่ากับ m/n ซึ่งเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ จงหาค่าของ $m+n$

Solution:

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)\cdot \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)\cdot \left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)$

อนุกรมเรขาคณิต

$1+r+r^2+r^3+\cdots, \ r<1$

$= \frac{1}{1-r}$

$= \frac{1}{1-1/2}\cdot\frac{1}{1-1/3}\cdot\frac{1}{1-1/5}$

$= 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}$

$= \frac{15}{4}$

$m+n = 19$

Notes: