

ชื่อ-สกุล: **Solutions**

โจทย์ปัญหาทั้งหมด 5 ข้อ ไม่ได้เรียงตามความยากง่าย สามารถเลือกทำข้อไหนก่อนก็ได้

1. ภาชนะใส่น้ำทรงกรวยมีฐานที่มีรัศมี 12 ซม. และความสูง 18 ซม. มีน้ำอยู่เต็มภาชนะ หากเทน้ำในภาชนะนี้ลงไปอีกภาชนะที่เป็นทรงกระบอกที่มีฐานรัศมี 24 ซม. ความสูงของน้ำในภาชนะทรงกระบอกนี้จะมีค่าเป็นเท่าใด

Solution:

$V_{\text{กรวย}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 18$
 $V_{\text{กระบอก}} = \pi \cdot 24^2 \cdot h$
 $\therefore \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot 18 = \pi \cdot 24^2 \cdot h$
 $h = \frac{12^2 \cdot 6}{24^2} = 1.5 \text{ ซม.}$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $V = \pi r^2 h$

2. ให้ $a + ar_1 + ar_1^2 + ar_1^3 + \dots$ และ $a + ar_2 + ar_2^2 + ar_2^3 \dots$ เป็นสองอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ของจำนวนจริงบวกที่ต่างกัน โดยที่ทั้งสองอนุกรมมีพจน์แรกเป็นจำนวนเดียวกัน กำหนดให้ผลรวมของอนุกรมแรกคือ r_1 และผลรวมของอนุกรมที่สองคือ r_2 ข้อใดคือค่าของ $r_1 + r_2$

Solution:

$r_1 = a + ar_1 + ar_1^2 + ar_1^3 + \dots = \frac{a}{1-r_1}$
 $r_2 = a + ar_2 + ar_2^2 + ar_2^3 + \dots = \frac{a}{1-r_2}$
 $\therefore a = r_1(1-r_1) = r_2(1-r_2)$
 $r_1 - r_1^2 = r_2 - r_2^2$
 $(r_1 - r_2) - (r_1^2 - r_2^2) = 0$
 $(r_1 - r_2)(1 - (r_1 + r_2)) = 0 \rightarrow r_1 \neq r_2 \text{ หรือ } r_1 + r_2 = 1$

วิธีหาผลรวมของอนุกรมเรขาคณิต

$S = a + ar_1 + ar_1^2 + ar_1^3 + \dots$
 $r_1 S = ar_1 + ar_1^2 + ar_1^3 + \dots$
 $S - r_1 S = a \Rightarrow S = \frac{a}{1-r_1}$

เพราะ 2 อนุกรม ต่างกัน

3. ให้ $N = 34 \cdot 34 \cdot 63 \cdot 270$ ข้อใดคืออัตราส่วนระหว่างผลรวมของตัวหารที่เป็นจำนวนคี่ต่อผลรวมของตัวหารที่เป็นจำนวนคู่ของ N

Solution:

$N = 34 \cdot 34 \cdot 63 \cdot 270$
 $= 2 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 5$
 $= 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17^2$

ผลรวมของตัวประกอบ คี่

$= (3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1)(5+1)(7+1)(17^2 + 17 + 1)$

ผลรวมของตัวประกอบ คู่

$= (2^3 + 2^2 + 2)(3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1)(5+1)(7+1)(17^2 + 17 + 1)$

ผลรวมคู่ : คี่ = $2^3 + 2^2 + 2 : 1 = 14 : 1$

สูตรผลรวมของตัวประกอบบวก

โดย ทฤษฎีบทมูลฐานเลขคณิต

$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_m^{a_m}$

ผลรวมของตัวประกอบบวกทั้งหมด

$= (p_1^{a_1} + p_1^{a_1-1} + \dots + p_1 + 1)$
 $\times (p_2^{a_2} + p_2^{a_2-1} + \dots + p_2 + 1)$
 \vdots
 $\times (p_m^{a_m} + p_m^{a_m-1} + \dots + p_m + 1)$

ถ้าลองกระจายออกมา ทั้งหมด จะเห็นว่า

4. สมมติว่าในบ่อน้ำแห่งหนึ่งมีสัตว์อยู่สองชนิดที่พูดได้คือคางคกและกบ คางคกจะพูดความจริงเสมอ ส่วนกบจะพูดเท็จเสมอ สัตว์ไม่ทราบชนิดสัตว์ คือ ไบรอัน คริส ลีรอย และ ไมค์ พูดคุยกันด้วยประโยคดังต่อไปนี้

- ไบรอัน: “ฉันกับไมค์เป็นสัตว์คนละชนิดกัน”
- คริส: “ลีรอยเป็นกบ”
- ลีรอย: “คริสเป็นกบ”
- ไมค์: “ในพวกเราทั้งสี่ตัว มีคางคกอยู่อย่างน้อยสองตัว”

จงหาว่ามีกบอยู่ในสัตว์สี่ตัวนี้กี่ตัว

Solution:

กรณีที่ 1 ถ้าคริสเป็น กบ ลีรอยจะเป็น คางคก (ซึ่งไม่ขัดแย้งกับ คำพูดของลีรอย)

- ถ้าไบรอันเป็นคางคก → ไมค์เป็นกบ แต่ที่ ไมค์พูดเท็จเป็นจริง → ขัดแย้ง
- ถ้าไบรอัน เป็นกบ → ไมค์ก็จะ เป็นกบ → เป็นไปได้

กรณีที่ 2 ถ้า คริสเป็น คางคก ลีรอยจะเป็น กบ (ซึ่งไม่ขัดแย้งกับ คำพูดของลีรอย)

- ถ้าไบรอันเป็นคางคก → ไมค์เป็นกบ แต่ที่ ไมค์พูดเท็จเป็นจริง → ขัดแย้ง
- ถ้าไบรอัน เป็นกบ → ไมค์ก็จะ เป็นกบ → เป็นไปได้

ทั้ง 2 กรณี มีกบ 3 ตัว

5. ให้ $P(n)$ และ $S(n)$ เป็นผลคูณและผลบวกของเลขโดดของ n ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น $P(23) = 6$ และ $S(23) = 5$ ถ้า n เป็นจำนวนสองหลักที่ $N^n = P(n) + S(n)$ จงหาว่าหลักหน่วยของ n คืออะไร

Solution:

$$n = \overline{ab} = 10a + b$$

$$P(n) = ab$$

$$S(n) = a + b$$

$$N = P(n) + S(n)$$

$$\Rightarrow 10a + b = ab + a + b$$

$$9a = ab$$

$$\therefore b = 9$$

Notes: