ชื่อ-สกุล: Solutions

โจทย์ปัญหามีทั้งหมด 5 ข้อ ไม่ได้เรียงตามความยากง่าย สามารถเลือกทำข้อไหนก่อนก็ได้

1. จำนวนจริง c, b, a เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต โดย $a \geq b \geq c \geq 0$ ถ้าสมการ $ax^2 + bx + c$ มีรากที่แตกต่างกันเพียงรากเดียว จงหาค่าของรากนั้น

Solution: เนื่องจาก c, b, a เป็นลำดับเลขคณิต เราให้ผลต่างร่วมเป็น d

$\therefore$ $b = c+d$ และ $a = b+d = c+2d$

$ax^2+bx+c = (c+2d)x^2+(c+d)x+c$

มีรากที่ต่างกันเพียงรากเดียว แปลว่า discriminant $= 0$ (b^2-4ac)

$(c+d)^2 - 4(c+2d)c = 0$

$c^2+2cd+d^2-4c^2-8cd = 0$

$3c^2+6cd-d^2=0$

เราสามารถหา c ในรูป d ได้

$3c^2+6d\cdot c+(-d^2)=0 \rightarrow c = \dfrac{-6d \pm \sqrt{36d^2+12d^2}}{6} = \dfrac{-3d+2\sqrt{3}d}{3} = \left(\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}\right)d$ (เพราะ $c \geq 0$)

$c = \left(\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}\right)d$

$b = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}d$

$a = \left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)d$

ax^2+bx+c

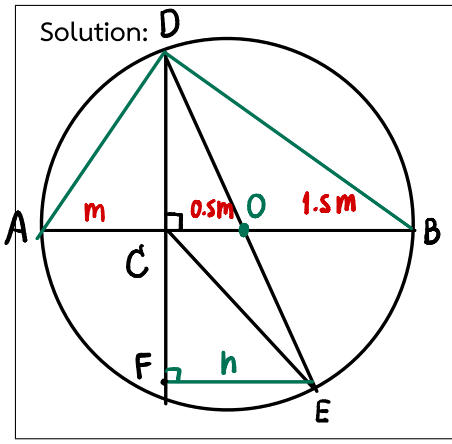
$= d\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}x^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}\right)$

ราก $= \dfrac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} = \dfrac{-1}{2+\sqrt{3}}$

2. จากรูปด้านล่างนี้ ให้ $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และจุด C เป็นจุดบน $\overline{AB}$ โดยที่ $2 \cdot AC = BC$ และให้ D และ E เป็นจุดสองจุดบนเส้นรอบวง โดยที่ $\overline{DC} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{DE}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นที่สอง ข้อใดคืออัตราส่วนของพื้นรูปสามเหลี่ยม DCE และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABD

$2\sqrt{12}$

Solution:



ทั้ง $\overline{AB}$ และ $\overline{DE}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
ดังนั้น $\overline{AB}$ ตัดกับ $\overline{DE}$ ที่จุดศูนย์กลาง (เรียกว่า O)

ให้ $AC = m \rightarrow BC = 2m$

$AB = 3m \Rightarrow AO = \dfrac{3m}{2} = 1.5m$

$\therefore CO = 0.5m$

ต้องการหา $[DCE] : [ABD]$

$[DCE] = \frac{1}{2}\cdot DC \cdot h$ (ส่วนสูงจากจุด E)

$[ADB] = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot DC$

$[DCE] : [ABD]$
$= h : AB = 1 : 3$

$\Delta CDO \sim \Delta FDE$
$FE = 2CO = m$
$3m$

3. สมมติให้ $P(x)$ เป็นพหุนามที่หารด้วย $x-2$ และ $x+3$ แล้วเหลือเศษ 5 และ -10 ตามลำดับ จงหาเศษที่เหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย x^2+x-6

ตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร เศษ

$P(x) = m(x)\cdot q(x) + r(x)$ $\quad \deg(r(x)) < \deg(m(x))$

Solution: Division algorithm

$P(x) = (x-2)\cdot q_1(x) + 5 \rightarrow P(2) = 5$

$P(x) = (x+3)\cdot q_2(x) - 10 \rightarrow P(-3) = -10$

$P(x) = (x^2+x-6)\,q_3(x) + r_3(x)$

degree < 2

เขียน $r_3(x) = ax+b$

$P(x) = (x^2+x-6)\cdot q_3(x) + ax+b$

$P(2) = a\cdot 2+b \rightarrow 5 = 2a+b$

$P(-3) = a\cdot -3+b \rightarrow -10 = -3a+b$

$a=3, b=-1$

เศษ $r_3(x) = 3x-1$

4. จงหาค่าของ

$$\sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{100} i+j$$

Solution:

$$\sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{100} i+j = \sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{100} i + \sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{100} j$$

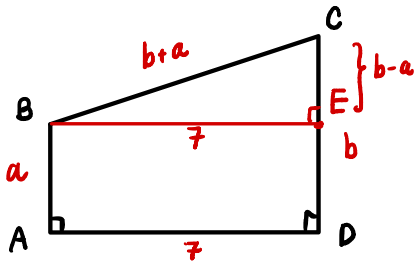
$$= \sum_{i=1}^{100} 100i + \sum_{i=1}^{100} 5050$$

$$= 100(5050) + 5050 \cdot 100$$

$$= 1010000$$

5. ในสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ ส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AD}$, $AB+CD = BC$ และ $AB < CD$ ถ้า $AD = 7$ จงหาค่าของ $AB \cdot CD$

Solution:



ให้ $CD = b$, $AB = a$

ลากเส้นตรงจาก B ไปตั้งฉากกับ CD ที่ E

เราจะได้ว่า

$CE = CD - ED = CD - AB = b - a$

$BC = a + b$ (จากโจทย์)

$\triangle BCE$ เป็น $\triangle$ มุมฉาก

พีทาโกรัส $(b+a)^2 = (b-a)^2 + 7^2$

$4ab = 49$

$ab = 12.25$

Notes:

เอกสารจัดเตรียมโดย พี่พลอย นวพรรณ วัฒนาวานิชกูล