ชื่อ-สกุล: Solutions

โจทย์ปัญหามีทั้งหมด 5 ข้อ ไม่ได้เรียงตามความยากง่าย สามารถเลือกทำข้อไหนก่อนก็ได้

1. ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่ง ถ้าเราเขียน $\frac{7}{51}$ (ในเลขฐานสิบ) ในรูปของทศนิยมซ้ำฐาน k เราจะได้ว่า

$$\frac{7}{51}_{10} = 0.\overline{23}_k = 0.232323\ldots_k .$$

จงหาค่าของ k

Solution:

$$\frac{7}{51} = 2\cdot k^{-1} + 3\cdot k^{-2} + 2\cdot k^{-3} + 3\cdot k^{-4} + \cdots$$
$$= (2\cdot k^{-1} + 2\cdot k^{-3} + 2\cdot k^{-5} + \ldots) + (3\cdot k^{-2} + 3\cdot k^{-4} + 3\cdot k^{-6} + \ldots)$$
$$= \frac{2}{k}\left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \cdots\right) + \frac{3}{k^2}\left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \cdots\right)$$
$$= \left(\frac{2}{k} + \frac{3}{k^2}\right)\left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \cdots\right)$$
$$= \frac{2k+3}{k^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k^2}}$$
$$= \frac{2k+3}{k^2-1}$$

$$\therefore \frac{7}{51} = \frac{2k+3}{k^2-1}$$
$$7k^2 - 7 = 102k + 153$$
$$7k^2 - 102k - 160 = 0$$
$$(7k+10)(k-16) = 0$$
$k = \cancel{-\frac{10}{7}}$ หรือ $\underline{16}$

2. มีจำนวนเต็มบวกสามหลักกี่จำนวน ที่หลักตรงกลางคือค่าเฉลี่ยของหลักที่ 1 และหลักที่ 3

Solution:

$\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}$

$b = \frac{a+c}{2}$

จะเห็นได้ว่า ไม่ว่า a และ c จะเป็นอะไร ขอให้ $a+c$ เป็นจำนวนคู่ b จะเป็นจำนวนเต็มเสมอ

• เนื่องจากว่าค่าของ b ถูกกำหนดโดย a และ c เราแค่ต้องหาว่ามี a, c กี่แบบที่เป็นไปได้

$\because$ $a+c$ เป็นคู่

① a, c เป็นคู่ $\Rightarrow$ $a \in \{2,4,6,8\}$, $c \in \{0,2,4,6,8\}$ $\Rightarrow$ $4\cdot 5 = 20$ จำนวน

② a, c เป็นคี่ $\Rightarrow$ $a, c \in \{1,3,5,7,9\}$ $\Rightarrow$ $5\cdot 5 = 25$ จำนวน

รวมทั้งสิ้น 45 จำนวน

3. กำหนดให้สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตเป็น $p, 9, 3p-q$ และ $3p+q$ ข้อใดคือพจน์ที่ 2010 ของลำดับนี้

Solution:

$p,\ 9,\ 3p-q,\ 3p+q$

$d = 9 - p = 3p - q - 9 = 2q$

$18 = 4p - q$ $3p - 9 = 3q$

$p - 3 = q$

$\therefore 18 = 4p - (p-3)$
$= 3p + 3$
$p = 5$
$\therefore d = 9 - p = 4$

พจน์ที่ 2010
$= p + (2010-1)d$
$= 5 + 2009\cdot 4$
$= 5 + 8036$
$= 8041$

4. ให้ $f(x) = x^2(1-x)^2$ ข้อใดคือผลรวมของ

$$f\left(\frac{1}{2565}\right) - f\left(\frac{2}{2565}\right) + f\left(\frac{3}{2565}\right) - f\left(\frac{4}{2565}\right) + \cdots - f\left(\frac{2564}{2565}\right)$$

Solution:

เราสังเกตว่า $f(1-x) = (1-x)^2(1-(1-x))^2 = (1-x)^2x^2 = f(x)$

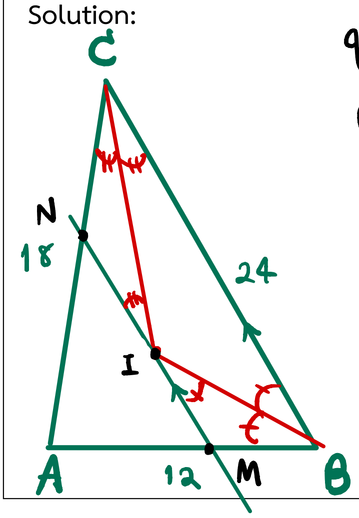
$\therefore \; f(1-x) - f(x) = 0$

$$f\left(\frac{1}{2565}\right) - f\left(\frac{2564}{2565}\right) = 0 \quad +$$
$$-f\left(\frac{2}{2565}\right) + f\left(\frac{2563}{2565}\right) = 0 \quad +$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$+$$
$$-f\left(\frac{1282}{2565}\right) + f\left(\frac{1283}{2565}\right) = 0$$

$\therefore$ ผลรวมที่เราต้องการ $= 0.$

5. รูปสามเหลี่ยม ABC มีความยาวด้าน $AB = 12, BC = 24$ และ $AC = 18$ กำหนดให้เส้นตรงที่ขนานกับ BC ตัดผ่านจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งมุมของ$\triangle ABC$ และยังตัดผ่าน AB ที่จุด M และ AC ที่จุด N จงหาเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม AMN

Solution:

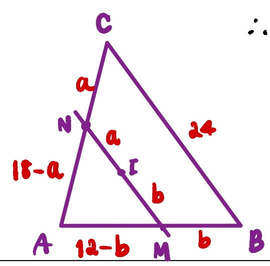


ให้ I เป็นจุดตัดเส้นแบ่งครึ่งมุม

เพราะว่า $\overline{MN} \parallel \overline{BC} \rightarrow \angle NIC = \angle ICB = \angle ICN$

$\therefore IN = CN$ ให้ $IN = CN = a$

ในทำนองเดียวกัน $IM = MB$ ให้ $IM = MB = b$



$\therefore AM = 12-b$

$AN = 18-a$

$\triangle AMN$ มีเส้นรอบรูป

$18-a+12-b+(a+b) = 30$

Notes: