ชื่อ-สกุล: Solutions

โจทย์ปัญหามีทั้งหมด 5 ข้อ ไม่ได้เรียงตามความยากง่าย สามารถเลือกทำข้อไหนก่อนก็ได้

1. ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่เศษที่เหลือจากการหาร 555 และ 670 ด้วย m มีค่าเท่ากันคือ p ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะบวก จงหาค่าของ $m+p$

Solution: Division algorithm (หลักการหาร)

$a = b \cdot q + r \rightarrow$ เศษ $\quad 0 \leq r \leq b-1$

ตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร

$555 = m \cdot q_1 + p \quad -(1)$

$670 = m \cdot q_2 + p \quad -(2)$

$(2)-(1) \quad 115 = m(q_2 - q_1)$

$5 \cdot 23 = m(q_2 - q_1)$

$m = 5, 23$ หรือ 115

ถ้า $m=5 \rightarrow p=0$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

ถ้า $m=23 \rightarrow p=3$

ถ้า $m=115 \rightarrow p=95$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

$\therefore \quad m = 23$

$p = 3$

$m+p = 26$

2. ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ

$$\underbrace{x + \frac{1}{y} = 4}_{①}, \quad \underbrace{y + \frac{1}{z} = 1}_{②}, \quad \underbrace{z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}}_{③}$$

ข้อใดคือค่าของ xyz

Solution:

①·②·③: $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right) = \frac{28}{3}$

$\therefore \quad xyz + y + z + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = \frac{28}{3}$

$xyz + \left(x+\frac{1}{y}\right) + \left(y+\frac{1}{z}\right) + \left(z+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{xyz} = \frac{28}{3}$

$xyz + 4 + 1 + \frac{7}{3} + \frac{1}{xyz} = \frac{28}{3}$

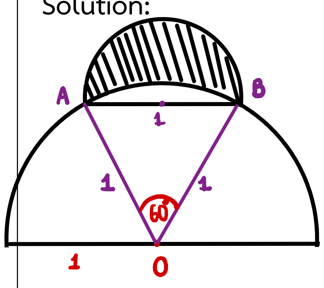
$xyz + \frac{1}{xyz} = 2$

ให้ $A = xyz$; $\underbrace{\left(A + \frac{1}{A} = 2\right)}_{\text{คูณตลอดด้วย } A} \Rightarrow A^2 - 2A + 1 = 0$

$(A-1)^2 = 0 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow xyz = 1$

3. รูปครึ่งวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 หน่วยวางอยู่บนรูปครึ่งวงกลมอีกรูปที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 หน่วย ดังที่แสดงในรูปด้านล่าง จงหาพื้นที่ของรูปพระจันทร์เสี้ยวที่เป็นส่วนที่แรเงาในรูปด้านล่าง

Solution:



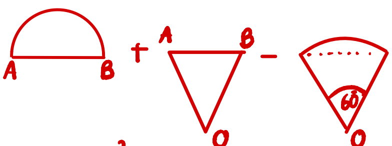
กำหนดจุด A, B, O

AO = BO = 1 (เพราะว่า เส้นผ่านศูนย์กลางวงใหญ่ = 2)

AB = 1 (เส้นผ่านศูนย์กลาง วงเล็ก = 1)

$\triangle ABO$ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า $\Rightarrow \angle AOB = 60^\circ$

พื้นที่แรเงา =



$= \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 - \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2$

$= \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{24}$

4. กำหนดให้การหาค่าเฉลี่ยแบบวนซ้ำของจำนวนเต็ม 1, 2, 3, 4, และ 5 ถูกนิยามดังต่อไปนี้

(a) เรียงจำนวนทั้งห้าในลำดับใดๆ ก็ได้

(b) หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของสองจำนวนแรก

(c) นำค่าเฉลี่ยที่ได้จากข้อ ~~2~~ (b) มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตกับจำนวนที่สาม

(d) นำค่าเฉลี่ยที่ได้จากข้อ ~~3~~ (c) มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตกับจำนวนที่สี่

(e) และสุดท้ายให้นำค่าเฉลี่ยที่ได้จากข้อ ~~4~~ (d) มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตกับจำนวนที่ห้า

จงหา ~~ข้อใดคือ~~ผลต่างของค่าเฉลี่ยแบบวนซ้ำที่มากที่สุดและค่าเฉลี่ยแบบวนซ้ำที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้จากการดำเนินการดังกล่าว

ให้ a, b, c, d, e เป็นจำนวน $1, 2, 3, 4, 5$ ในลำดับใดๆ

Solution:

$a \quad b \quad c \quad d \quad e$

(a) $\frac{a+b}{2}$

(b) $\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)+c}{2} = \frac{a+b}{4} + \frac{c}{2}$

(c) $\frac{\left(\frac{a+b}{4}+\frac{c}{2}\right)+d}{2} = \frac{a+b}{8} + \frac{c}{4} + \frac{d}{2}$

(d) $\frac{\left(\frac{a+b}{8}+\frac{c}{4}+\frac{d}{2}\right)+e}{2} = \frac{a+b}{16} + \frac{c}{8} + \frac{d}{4} + \frac{e}{2}$

เราต้องการ ค่าที่มากที่สุด – ค่าที่น้อยที่สุด ของ $\frac{a+b}{16} + \frac{c}{8} + \frac{d}{4} + \frac{e}{2}$

มากสุด $e=5 \quad d=4 \quad c=3 \quad a=2 \quad b=1$

น้อยสุด $a=5 \quad b=4 \quad c=3 \quad d=2 \quad e=1$

∴ ผลต่าง

$= \left(\frac{1+2}{16} + \cancel{\frac{3}{8}} + \frac{4}{4} + \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{5+4}{16} + \cancel{\frac{3}{8}} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{6}{16} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{8}$

5. นำตัวอักษร A ห้าตัว B ห้าตัว และ C ห้าตัว มาเรียงกันเป็นลำดับของตัวอักษร 15 ตัวอักษร จงหาว่ามีการจัดเรียงกี่แบบที่ในห้าตัวอักษรแรกไม่มี A อยู่ ในห้าตัวอักษรถัดไปไม่มี B อยู่ และในห้าตัวอักษรสุดท้ายไม่มี C อยู่

Solution:

	$\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{ไม่มี A}}$	$\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{ไม่มี B}}$	$\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{ไม่มี C}}$
A :	0	มี A k ตัว	มี A $5-k$ ตัว
B :	มี B m ตัว	0	มี B $5-m$ ตัว
C :	มี C n ตัว	มี C $5-n$ ตัว	0
	$m+n=5$ ∴ $m=5-n$	$5-n+k=5$ ∴ $k=n$	$10-m-k=5$ ∴ $m+k=5$

Notes:

เราจะได้ว่า $k=n$ และ $m=5-n$

∴ ค่าของ k และ m ถูกกำหนดโดย n

ค่า n ที่เป็นไปได้ คือ $0, 1, 2, 3, 4, 5$

ห้าช่องแรก มีวิธีเลือก n ช่อง เพื่อวาง C $= \binom{5}{n}$

ห้าช่องถัดไป มีวิธีเลือก $5-n$ ช่อง เพื่อวาง C $= \binom{5}{5-n}$

ห้าช่องสุดท้าย มีวิธีเลือก $5-k = 5-n$ ช่อง เพื่อวาง A $= \binom{5}{5-n}$

∴ วิธีทั้งหมด $= \sum_{n=0}^{5} \binom{5}{n}\binom{5}{5-n}\binom{5}{5-n} = \sum_{n=0}^{5} \binom{5}{n}^3 = 1+5^3+10^3+10^3+5^3+1 = 2252$

เอกสารจัดเตรียมโดย พี่พลอย นวพรรณ วัฒนาวานิชกูล