ชื่อ-สกุล: Solutions

โจทย์ปัญหามีทั้งหมด 5 ข้อ ไม่ได้เรียงตามความยากง่าย สามารถเลือกทำข้อไหนก่อนก็ได้

1. มีจำนวนที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์กี่จำนวนที่เป็นตัวหารของผลคูณ $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots 9!$

Solution:

$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 2\cdot 3$
$4! = 2^3\cdot 3$
$5! = 2^3\cdot 3\cdot 5$
$6! = 2^4\cdot 3^2\cdot 5$
$7! = 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$
$8! = 2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$
$9! = 2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$

$1!\cdot 2!\cdots 9! = 2^{30}\cdot 3^{13}\cdot 5^5\cdot 7^3$

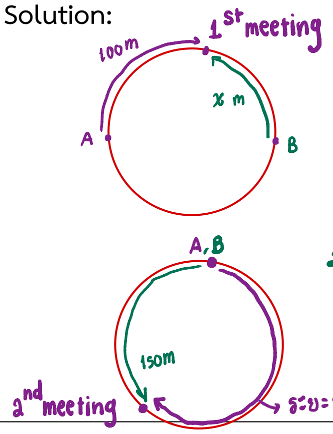
ตัวประกอบอยู่ในรูป $2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot 5^{a_3}\cdot 7^{a_4}$

กำลัง 2 สมบูรณ์ → $a_1 \in$ {จำนวนคู่ ตั้งแต่ 0 - 30}
$a_2 \in$ { — " — 0 - 13}
$a_3 \in$ { — " — 0 - 5}
$a_4 \in$ { — " — 0 - 3}

∴ จำนวนตัวประกอบ $= 16\cdot 7\cdot 3\cdot 2 = 672$

2. A และ B วิ่งในทิศตรงกันข้ามบนลู่วิ่งที่เป็นวงกลม พวกเขาเริ่มวิ่งจากจุดปลายทั้งสองด้านของเส้นผ่านศูนย์กลางลู่วิ่ง ทั้งสองวิ่งสวนกันครั้งแรกเมื่อ A วิ่งมาได้ 100 เมตรแล้ว จากนั้นพวกเขาวิ่งสวนกันอีกครั้งเมื่อ B วิ่งมาได้ 150 เมตรจากจุดที่พวกเขาเจอกันครั้งแรก ถ้าเด็กทั้งสองวิ่งด้วยความเร็วคงที่ ข้อใดคือความยาวของลู่วิ่งนี้ในหน่วยเมตร

Solution:



ให้อัตราเร็ว A = a
" B = b

และให้ x คือระยะทางจากจุดที่ B เริ่มจน B เจอกับ A ครั้งแรก
∴ ระยะครึ่งสนาม $= 100 + x$
(เมื่อ t_1 คือเวลาตั้งแต่เริ่มจนเจอครั้งแรก)

จะได้ว่า $100 = a\cdot t_1$
และ $x = b\cdot t_1$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{100}{x}$ —①

2nd meeting: $150 = b\cdot t_2$ (t_2 เวลาจากจุดที่เจอกันครั้งแรกจนเจอครั้งที่ 2)

ระยะทางทั้งรอบ $- 150 = a\cdot t_2$
$2(100+x) - 150 = a\cdot t_2$
$2x + 50 = a\cdot t_2$

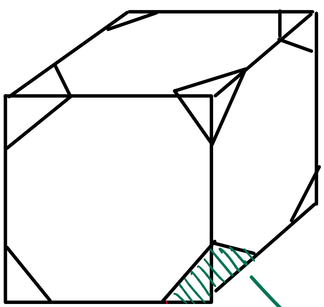
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{2x+50}{150}$ —②

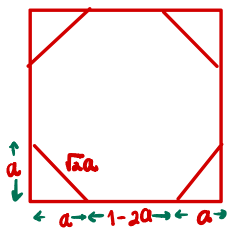
① = ② : $15000 = 2x^2 + 50x$
$x^2 + 25x - 7500 = 0$
$(x+100)(x-75) = 0$
$x = 75$

ระยะทางรอบสนาม $= 2(100+x) = 350$.

3. กำหนดลูกบาศก์ที่มีด้านแต่ละด้านยาว 1 หน่วย สมมติว่ามุมแต่ละมุมของลูกบาศก์ถูกตัด โดยทำให้หน้าแต่ละหน้าของลูกบาศก์กลายเป็นรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่า จงหาปริมาตรของรูปทรงใหม่นี้

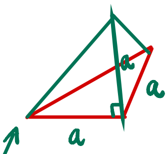
Solution:





$\sqrt{2}a = 1 - 2a$
$a(\sqrt{2}+2) = 1$
$a = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$
$= \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

ปริมาตรใหม่ = 1 - 8 · ปริมาตรมุม (พีระมิด)



ปริมาตรพีระมิด

$= \dfrac{1}{3}\cdot$ พท.ฐาน $\cdot$ สูง
$= \dfrac{1}{3}\cdot \dfrac{a\cdot a}{2}\cdot a$
$= \dfrac{1}{3}\cdot \dfrac{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^3}{2}$
$= \dfrac{1}{48}(8 - 3\cdot 4\sqrt{2} + 3\cdot 2\cdot 2 - 2\sqrt{2})$
$= \dfrac{1}{48}(20 - 14\sqrt{2})$

ปริมาตรใหม่ $= 1 - 8\left(\dfrac{1}{48}(20 - 14\sqrt{2})\right)$
$= \dfrac{7\sqrt{2}}{3} - \dfrac{7}{3}$

 เอกสารจัดเตรียมโดย พี่พลอย นวพรรณ วัฒนาวานิชกูล

4. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติดังนี้

(a) $f(1) = 1$

(b) $f(2n) = n \cdot f(n)$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ

ข้อใดคือค่าของ $f(2^{100})$

Solution:
$f(1) = 1$

$f(2) = 1 \cdot f(1) = 1$

$f(4) = 2 \cdot f(2) = 2 \cdot 1 = 2$

$f(8) = 4 \cdot f(4) = 2^2 \cdot 2 = 2^{1+2}$

$f(16) = 8 \cdot f(8) = 2^3 \cdot 2^{1+2} = 2^{1+2+3}$

$\vdots$

$f(2^{100}) = 2^{1+2+3+\dots+99}$

$= 2^{4950}$

5. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $ab \neq 1$ ถ้า $a^2 + 12a + 3 = 0$ และ $3b^2 + 12b + 1 = 0$ จงหาค่าของ $\frac{ab+a+1}{b}$

Solution:
$a^2 + 12a + 3 = 0 \rightarrow a = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = -6 \pm \sqrt{33}$

$3b^2 + 12b + 1 = 0 \rightarrow b = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-6 \pm \sqrt{33}}{3}$

สังเกตว่า $(-6+\sqrt{33}) \cdot \left(\frac{-6-\sqrt{33}}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1$

และ $\left(\frac{-6+\sqrt{33}}{3}\right) \cdot (-6-\sqrt{33}) = \frac{3}{3} = 1$

$\therefore (a,b) = \left(-6-\sqrt{33}, \frac{-6-\sqrt{33}}{3}\right)$ หรือ $\left(-6+\sqrt{33}, \frac{-6+\sqrt{33}}{3}\right)$

$\frac{ab+a+1}{b} = a + \frac{a}{b} + \frac{1}{b} = -6-\sqrt{33} + 3 + \frac{1}{\frac{-6-\sqrt{33}}{3}} = -9$ ($\frac{1}{\frac{-6-\sqrt{33}}{3}} = -6+\sqrt{33}$)

หรือ $= -6+\sqrt{33} + 3 + \frac{1}{\frac{-6+\sqrt{33}}{3}} = -9$ ($\frac{1}{\frac{-6+\sqrt{33}}{3}} = -6-\sqrt{33}$)

ทั้ง 2 กรณี ให้คำตอบ คือ -9

Notes: