เอกสารประกอบการอบรมในโครงการติว สอวน. ประจำปี พ.ศ.2565 โรงเรียนเบ็ญจะมะมหาราช
เวลา 7:30-8:30 วันที่ 4 สิงหาคม 2565

ชื่อ-สกุล: Solutions

โจทย์ปัญหามีทั้งหมด 5 ข้อ ไม่ได้เรียงตามความยากง่าย สามารถเลือกทำข้อไหนก่อนก็ได้

1. ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ โดยที่ $3x^2 + 3y^2 = 7$ และ $x^3 + y^3 = 3$ จงหาค่าของ $x + y$ ที่มากที่สุด

Solution:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad \text{—①}$$

$$(3x^2+3y^2)(x+y) = 3x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^3 \quad \text{—②}$$

$$② - ① : \underbrace{(3x^2+3y^2)}_{7}(x+y) - (x+y)^3 = \underbrace{2x^3+2y^3}_{3\cdot 2}$$

$$\therefore 7(x+y) - (x+y)^3 = 6$$

ให้ $x+y = A$:

$$A^3 - 7A + 6 = 0$$

1	1	0	-7	6
		1	1	0
	1	1	-6	

$$(A-1)(A^2+A-6) = 0$$

$$(A-1)(A+3)(A-2) = 0$$

$\therefore x+y$ มากสุด $= 2$

2. นิยามฟังก์ชัน f ดังต่อไปนี้ $f(1) = f(2) = 1$ และ $f(n) = f(n-1)$-$f(n-2) + n$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ ข้อใดคือค่าของ $f(2018)$

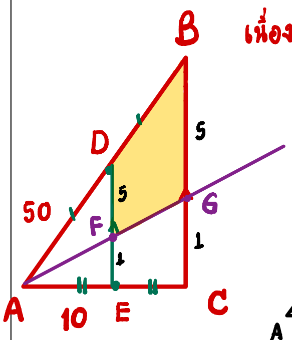
Solution:

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) - f(n-2) + n \\ &= [f(n-2) - f(n-3) + n-1] - f(n-2) + n \\ &= -f(n-3) + 2n - 1 \\ &= -(f(n-4) - f(n-5) + n-3) + 2n - 1 \\ &= -f(n-4) + f(n-5) + n + 2 \\ &= -[f(n-5) - f(n-6) + n-4] + f(n-5) + n + 2 \\ &= f(n-6) + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2018) &= f(2012) + 6 \\ &= f(2006) + 12 \\ &= f(2000) + 18 \\ &\ \ \vdots \\ &= f(2) + 2016 \\ &= 2017 \end{aligned}$$

3. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน $AB = 50$ ด้าน $AC = 10$ และมีพื้นที่ 120 หน่วย ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางบนเส้น $\overline{AB}$ และ E เป็นจุดกึ่งกลางบนเส้นตรง $\overline{AC}$ เส้นแบ่งครึ่งมุมของ $\angle BAC$ ตัดกับ $\overline{DE}$ และ BC ที่จุด F และ G ตามลำดับ จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม $FDBG$

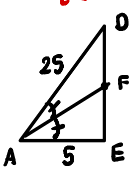
Solution: $[\triangle ABC] = 120$



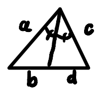
เนื่องจากจุด D แบ่งครึ่ง AB, E แบ่งครึ่ง AC

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (มีมุม A ร่วมกัน $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$)

$$\frac{[\triangle ADE]}{[\triangle ABC]} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow [\triangle ADE] = 30$$



"Angle of bisector"



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{10}{EF} = \frac{50}{DF} \rightarrow \frac{EF}{DF} = \frac{1}{5}$$

ในทำนองเดียวกัน $\frac{CG}{BG} = \frac{1}{5}$

$$\frac{[\triangle AGC]}{[\triangle ABC]} = \frac{GC}{BC} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore [\triangle AGC] = 20$$

$$\frac{[\triangle ADF]}{[\triangle ADE]} = \frac{5}{6}$$

$$[ADF] = \frac{5}{6} \cdot 30 = 25$$

$$\begin{aligned} \therefore [FDBG] &= 120 - [ADF] - [AGC] \\ &= 120 - 25 - 20 \\ &= 75 \end{aligned}$$

4. พิจารณาลำดับของจำนวน $4, 7, 1, 8, 9, 7, 6 \ldots$ สังเกตว่าพจน์ที่ n เมื่อ $n > 2$ ของลำดับนี้คือเลขในหลักหน่วยของผลบวกของสองพจน์ก่อนหน้า กำหนดให้ S_n เป็นผลรวมตั้งแต่พจน์ที่ 1 ถึงพจน์ที่ n ของลำดับดังกล่าว ข้อใดคือจำนวน n ที่มีค่าน้อยที่สุดที่สามารถทำให้ $S_n > 10,000$

Solution:

4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, ...

รูปแบบซ้ำกันทุกๆ 12 จำนวน

ทุกๆ 12 จำนวน ผลรวม = 60

เราต้องการ $S_n > 10,000$ ∴ เราต้องการประมาณ $\frac{10,000}{60} = 166$ sets

(set = จำนวน 12 จำนวน)

166 sets ให้ผลรวม $= 166 \cdot 60 = 9960$

เราต้องการเพิ่มอีกอย่างน้อย 41 :

$4+7+1+8+9+7+6 = 42$

(เราต้องการเพิ่มอีก 7 จำนวน)

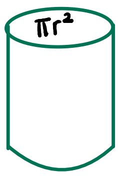
∴ เราต้องการทั้งหมด

$166 \cdot 12 + 7$

$= 1999$ จำนวน

5. ทรงกระบอกปิดอันหนึ่งมีปริมาตรเท่ากับพื้นที่ผิว หากเพิ่มความสูงขึ้น 50% และลดรัศมีลง 25% พบว่าทรงกระบอกปิดอันใหม่ที่ได้ยังคงมีปริมาตรเท่ากับพื้นที่ผิว จงหาปริมาตรของทรงกระบอกปิดเริ่มต้น

Solution:



ปริมาตร = พื้นที่ผิว

$\pi r^2 h = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$\therefore rh = 2r + 2h$

เพิ่มความสูง 50%

$h \to \frac{3}{2}h = h'$

ลดรัศมีลง 25%

$r \to \frac{3}{4}r = r'$

ปริมาตรใหม่ = พื้นที่ผิวใหม่

$\pi r'^2 h' = 2\pi r'^2 + 2\pi r' h'$

$r'h' = 2r' + 2h'$

$\frac{3}{4}r \cdot \frac{3}{2}h = 2 \cdot \frac{3}{4}r + 2 \cdot \frac{3}{2}h$

$\frac{9}{8}rh = \frac{3}{2}r + 3h$

นำมาแก้ระบบสมการ

$rh = 2r + 2h \quad -(1)$

$\frac{9}{8}rh = \frac{3}{2}r + 3h \quad -(2)$

$(1) \cdot \frac{9}{8} - (2): \quad 0 = \frac{3}{4}r - \frac{3}{4}h$

$r = h$

$\therefore (1): \quad r^2 = 2r + 2r$

$r^2 = 4r$

$r = 4$

ปริมาตรเริ่มต้น $= \pi r^2 h$

$= \pi \cdot 16 \cdot 4$

$= 64\pi$

Notes: