ชื่อ-สกุล: Solutions

โจทย์ปัญหามีทั้งหมด 6 ข้อ ไม่ได้เรียงตามความยากง่าย สามารถเลือกทำข้อไหนก่อนก็ได้

1. ให้ $f(x) = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a, b,$ และ c เป็นจำนวนเต็ม หากกำหนดให้ $f(1) = 0, 50 < f(7) < 60,$ $70 < f(8) < 80$ และ $5000k < f(100) < 5000(k+1)$ สำหรับจำนวนเต็ม k บางจำนวน ข้อใดคือค่าของ k

Solution:

$f(1) = a+b+c = 0$

$50 < f(7) = 49a+7b+c < 60 \Rightarrow 50 < (48a+6b)+(a+b+c) < 60$

$50 < 48a+6b < 60 \Rightarrow \frac{50}{6} < \underbrace{8a+b}_{\text{จำนวนเต็ม}} < 10 \quad \therefore 8a+b = 9$

$70 < f(8) = 64a+8b+c < 80 \Rightarrow 70 < (63a+7b)+(a+b+c) < 80$

$70 < 63a+7b < 80 \Rightarrow 10 < 9a+b < \frac{80}{7} \quad \therefore 9a+b = 11$

จะได้ว่า $a = 2$ $b = -7$

$\therefore c = 5$

$5000k < f(100) = 10000a+100b+c < 5000(k+1)$

$5000k < 19305 < 5000k+5000$

$\therefore k = 3$

2. ค่าเฉลี่ยของจำนวนนับสามจำนวนมากกว่าจำนวนที่น้อยที่สุดอยู่ 10 แล้วน้อยกว่าจำนวนที่มากที่สุดอยู่ 15 ถ้าค่ามัธยฐานของทั้งสามจำนวนเท่ากับ 5 แล้วผลรวมของทั้งสามจำนวนเท่ากับเท่าไหร่

Solution: ให้จำนวนนับสามจำนวน เป็น a, b, c โดยที่ $a \le b \le c$

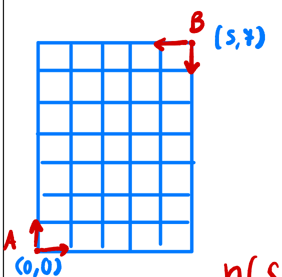
- $\frac{a+b+c}{3} - a = 10 \Rightarrow \frac{a+5+c}{3} - a = 10 \Rightarrow c - 2a = 25$ — (1)
- $c - \frac{a+b+c}{3} = 15 \Rightarrow c - \frac{a+5+c}{3} = 15 \Rightarrow 2c - a = 50$ — (2)
- มัธยฐาน $= b = 5$

(2) - (1)·2 ; $a = 0 \Rightarrow c = 25$

$a+b+c = 0+5+25 = 30$

3. วัตถุ A และ B เคลื่อนที่พร้อมๆ กันในระบบแกนพิกัดฉาก โดยการเคลื่อนที่แต่ละครั้งจะมีความยาว 1 หน่วย วัตถุ A เริ่มที่ $(0, 0)$ และสามารถเคลื่อนไปในทิศบนและขวาเท่านั้น โดยที่แต่ละทิศมีความน่าจะเป็นเท่าๆ กัน ส่วนวัตถุ B เริ่มที่ $(5, 7)$ และสามารถเคลื่อนไปในทิศล่างและซ้ายเท่านั้น โดยที่แต่ละทิศก็มีความน่าจะเป็นเท่าๆ กันเช่นกัน ข้อใดคือการประมาณค่าที่ใกล้เคียงที่สุดของความน่าจะเป็นที่วัตถุทั้งสองจะเคลื่อนมาเจอกัน

Solution:



ถ้า A และ B เจอกัน แปลว่า เส้นทางของทั้งคู่จะประกอบกัน
เนื่องจาก A ไปได้แค่ → กับ ↑ B ไปได้แค่ ← กับ ↓
เส้นทางที่เกิดจาก A และ B จะประกอบด้วย แนวนอน 5 ครั้ง
และ แนวตั้ง 7 ครั้ง (→→→→→ ↑↑↑↑↑↑↑)

$\therefore$ จำนวนวิธี $= \frac{12!}{5!7!} = n(E)$

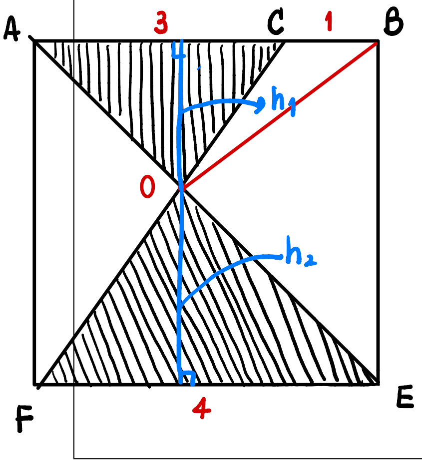
$n(S)$: จำนวนวิธีที่ A และ B เดินได้ความยาวรวม = 12 หน่วย
(แต่อาจจะไม่พบกัน)
แปลว่า A และ B เดินคนละ 6 หน่วย
จำนวนวิธี $= 2^6 \cdot 2^6$ (แต่ละตาต่างคนมี 2 ทางเลือก)
$= n(S)$

ลืมเครื่องคิดเลข

$\therefore P(E) = \frac{\frac{12!}{5!7!}}{2^6 2^6} \approx 0.20$

4. จากรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปนี้มี $AC : BC = 3 : 1$ จงหาสัดส่วนของพื้นที่แรเงาต่อพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปนี้

Solution:



ถ้าให้ $[BOC] = m$

$[AOC] = 3m$

$\Delta AOC \sim \Delta FOE$

$\frac{[AOC]}{[FOE]} = \left(\frac{AC}{FE}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$[FOE] = 3m \cdot \frac{16}{9} = \frac{16m}{3}$

$\underbrace{[\Delta AOB] + [FOE]}_{\text{มีพท} = \frac{1}{2}[ABEF]} = 4m + \frac{16m}{3} = \frac{28m}{3}$

เพราะว่า $[AOB] + [FOE] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \overset{AB}{\overset{\shortparallel}{FE}} \cdot h_2$

$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AB$

ดังนั้น

$[ABEF] = \frac{56m}{3}$

$\frac{[\text{แรเงา}]}{[ABEF]} = \frac{3m + \frac{16}{3}m}{\frac{56}{3}m} = \frac{25}{56}$

5. จำนวนจริงบวกสี่จำนวน a, b, c และ d มีผลคูณเท่ากับ $8!$ และทั้งสี่จำนวนสอดคล้องกับระบบสมการ

$$ab + a + b = 524$$
$$bc + b + c = 146$$
$$cd + c + d = 104$$

จงหาค่าของ $a + b + c + d$

Solution:

$ab + a + b + 1 = 525 \rightarrow (a+1)(b+1) = 525 = 5^2 \cdot 3 \cdot 7$ —(1)

$bc + b + c + 1 = 147 \rightarrow (b+1)(c+1) = 147 = 3 \cdot 7^2$ —(2)

$cd + c + d + 1 = 105 \rightarrow (c+1)(d+1) = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ —(3)

$abcd = 8!$

จาก (1) และ (2) : $(b+1) \mid 21 \Rightarrow b+1 = \cancel{1}, 3, 7, 21$ ($b>0$)

① $b+1 = 3 \rightarrow a+1 = 175 \rightarrow c+1 = 49 \rightarrow d+1 \notin \mathbb{Z}$ ปปผด

② $b+1 = 7 \rightarrow a+1 = 75 \rightarrow c+1 = 21 \rightarrow d+1 = 5$ ปปผด

$b = 6$, $a = 74$, $c = 20$, $d = 4$

$74 \nmid 8!$

③ $b+1 = 21 \rightarrow a+1 = 25 \rightarrow c+1 = 7 \rightarrow d+1 = 15$ $\Rightarrow a+b+c+d = 64$

$b = 20$, $a = 24$, $c = 6$, $d = 14$

Notes: Check : $abcd = 8!$