โครงงานวิทยาศาสตร์

การศึกษาการซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมเพื่อให้ได้พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดภายใต้การเลื่อนขนานและการหมุน

Study of Overlapped Triangles with the Maximal Overlapped Area under Translation and Rotation

นายภูมิ เลิศภิญโญวงศ์

นางสาวนวพรรณ วัฒนาวานิชกูล

นายกฤตเมธ เล้งรักษา

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ (องค์การมหาชน)

ปีการศึกษา 2557

ใบรับรองโครงงานวิทยาศาสตร์

โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ (องค์การมหาชน)

มัธยมศึกษาตอนปลาย	คณิตศาสตร์
หลักสูตร	**สาขาวิชา**

การศึกษาการซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมเพื่อให้ได้พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดภายใต้การเลื่อนขนานและการหมุน

Study of Overlapped Triangles with the Maximal Overlapped Area under Translation and Rotation

นามผู้ทำโครงงาน	นาย ภูมิ	เลิศภิญโญวงศ์	ม. 5/5 เลขประจำตัวนักเรียน	06536
	นางสาว นวพรรณ	วัฒนาวานิชกูล	ม. 5/8 เลขประจำตัวนักเรียน	06592
	นาย กฤตเมธ	เล้งรักษา	ม. 5/6 เลขประจำตัวนักเรียน	06549

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

ประธานกรรมการ..วันที่......เดือน..............พ.ศ. 2558

(อาจารย์สิทธิโชค โสมอ่ำ)

กรรมการ..วันที่......เดือน..............พ.ศ. 2558

(ดร.นคร จันละ)

กรรมการ..วันที่......เดือน..............พ.ศ. 2558

(ดร.ธรรมนูญ ผุยรอด)

กรรมการ..วันที่......เดือน..............พ.ศ. 2558

(อาจารย์จีรวรรณ บัวประทุม)

หัวหน้าสาขาวิชาคณิตศาสตร์...วันที่......เดือน.............พ.ศ. 2558

(อาจารย์ชิดเฉลิม คงประดิษฐ์)

หัวข้อโครงงาน การศึกษาการซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมเพื่อให้ได้พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดภายใต้การเลื่อนขนานและการหมุน

ผู้ทำโครงงาน นายภูมิ เลิศภิญโญวงศ์ นางสาวนวพรรณ วัฒนาวานิชกูล และ นายกฤตเมธ เล้งรักษา

อาจารย์ที่ปรึกษา อ.สิทธิโชค โสมอ่ำ และ ผศ.ดร.วัชรินทร์ วิชิรมาลา

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

โรงเรียน มหิดลวิทยานุสรณ์ **ปีการศึกษา** 2557

บทคัดย่อ

ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่ซ้อนทับเป็นหนึ่งในปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีผู้คนสนใจอย่างกว้างขวาง งานวิจัยนี้ศึกษาเกี่ยวกับพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ ภายใต้การเลื่อนขนานและการหมุนแต่ไม่รวมถึงการสะท้อน โดยขั้นแรกจะทำการสังเกตการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับมีค่ามากที่สุดโดยใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad (GSP) หลังจากนั้นก็จะทำการสร้างและพิสูจน์ข้อคาดเดา ผลปรากฏว่าพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งไม่มีรูปใดถูกซ้อนทับโดยอีกรูปหนึ่งได้อย่างสนิทนั้นจะเกิดขึ้นเมื่อสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีด้าน 1 ด้านที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันและซ้อนทับกัน หรืออาจเกิดขึ้นเมื่อสามเหลี่ยมสองรูปจัดเรียงตัวเป็นรูปร่างคล้ายรูปดาว 6 แฉก (Star-shaped) ซึ่งในกรณีแรกนั้นจะสามารถหาตำแหน่งการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับมีค่ามากที่สุด อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่สองยังจำเป็นต้องใช้เครื่องมือหรือวิธีการที่มีความซับซ้อนมากขึ้นในการที่จะหาตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับมีค่ามากที่สุด ซึ่งเป็นหัวข้อที่น่าสนใจและควรแก่การศึกษาต่อไป

Research Title Study of Overlapped Triangles with the Maximal Overlapped Area under Translation and Rotation

Researchers Mr. Poom Lertpinyowong, Miss Nawapan Wattanawanichkul and Mr. Krittamed Lengrugsa

Advisors Mr. Sittichoke Som-am, Asst. Prof. Dr. Wacharin Wichiramala

Department Mathematics

School Mahidol Wittayanusorn **Academic Year** 2014

Abstract

Problems about overlapped area are also one of the problems that many mathematicians have studied for decades. In this research, the maximal overlapped area of two arbitrary triangles under translation and rotation were studied. Reflection is not allowed during the process of the research. First, we observed the arrangement of two arbitrary triangles that maximized the overlapped area by using The Geometer’s Sketchpad (GSP) and made some conjectures. The results showed that the maximal overlapped area of two triangles that one cannot cover another one occurs when one side of each triangle lies on the same line, overlapping each other, or when two triangles form a star-shaped. In the first case, we could find the unique position of the triangles that gave the maximal overlapped area. However, in the second case, it might require more tools to help us finding the position that give the maximal overlapped area. That is an interesting topic that needs further clarification.

กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณ อ.สิทธิโชค โสมอ่ำ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ และ ผศ.ดร.วัชรินทร์ วิชิรมาลา สาขาวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เป็นอย่างยิ่ง ที่ได้ให้คำแนะนำและคำปรึกษาที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการทำงานวิจัยชิ้นนี้ให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

คณะผู้จัดทำ

19 กุมภาพันธ์ 2558

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ (ต่อ)

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่ **หน้า**

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่ **หน้า**

สารบัญภาพ (ต่อ)

สารบัญภาพ (ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของโครงงาน

ปัญหาการจับคู่ หรือ Matching problem เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในช่วงศตวรรษที่ 18 เป็นปัญหาทางด้านทฤษฎีกราฟซึ่งศึกษาการเข้าคู่กันของจุดในกราฟ หนึ่งในปัญหาการจับคู่นี้คือการพิจารณารูปร่าง หรือเซตของจุด 2 รูปร่าง หรืออาจเรียกได้ว่ารูปหลายเหลี่ยม (polygons) ว่ารูปทั้งสองมีความคล้ายคลึงกันมากน้อยอย่างไร โดยมักศึกษาว่าจะมีความคล้ายคลึง (resemblance) กันมากที่สุดเมื่อใดหลังผ่านการเคลื่อนที่คงรูป (rigid motion) ซึ่งการวัดความคล้ายคลึงนั้นมีด้วยกันหลายวิธี เช่น Hausdorff distance และ Fréchet distance

Mark de Berg และคณะ ได้นำแนวคิดดังกล่าวมาศึกษาในหัวข้อ “Computing the Maximum Overlap of Two Convex Polygons Under Translations หรือ การคำนวณหาพื้นที่รวมที่น้อยที่สุดของรูปหลายเหลี่ยมนูนใดๆสองรูปที่ซ้อนทับกัน ภายใต้การเลื่อนขนาน” โดยพิจารณาความคล้ายคลึงของรูปหลายเหลี่ยมโดยพิจารณาจากพื้นที่ที่ทับซ้อนกัน กล่าวคือยิ่งมีพื้นที่ซ้อนทับมากก็ยิ่งคล้ายคลึงมาก ซึ่งสมมูลกับพื้นที่รวมน้อยที่สุดนั่นเอง

เนื่องด้วยคณะผู้ศึกษามีความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ ทางด้านเรขาคณิต หลังจากที่ได้อ่านบทความข้างต้น ทางคณะผู้ศึกษาจึงเกิดความสนใจในปัญหาดังกล่าว และได้แนวคิดที่จะศึกษา “การซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมเพื่อให้ได้พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดภายใต้การเลื่อนขนานและการหมุน” โดยคณะผู้ศึกษามีแนวคิดในการแก้ปัญหานี้โดยเริ่มจากการหาเงื่อนไขในกรณีที่สามเหลี่ยมสองรูปใดๆจะสามารถซ้อนทับกันได้สนิท จากนั้นจึงสังเกตรูปแบบความสัมพันธ์ ซึ่งจะนำไปสู่ข้อคาดการณ์ แล้วจึงหาวิธีการพิสูจน์กระบวนการหรืออัลกอริทึมตามข้อคาดการณ์ เพื่อให้ได้รูปแบบการวางสามเหลี่ยมให้เกิดพื้นที่รวมจากการซ้อนทับกันน้อยที่สุด ซึ่งคาดว่าผลจากการศึกษานี้จะสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการจัดวางสิ่งของเพื่อให้ใช้พื้นที่น้อยที่สุด เพื่อให้สามารถนำพื้นที่ที่เหลือมาใช้ประโยชน์ได้มากที่สุด เช่น การจัดเรียงสิ่งของในการขนส่งหรือ การออกแบบสิ่งของต่างๆ เป็นต้น

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1.2.1 เพื่อหาและแสดงวิธีการจัดวางรูปสามเหลี่ยมสองรูปซ้อนทับกันให้เกิดพื้นที่รวมน้อยที่สุด

1.2.2 เพื่อนำวิธีการจัดวางดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ในการจัดวางสิ่งของเพื่อให้ใช้พื้นที่น้อยที่สุด เพื่อให้สามารถนำพื้นที่ที่เหลือมาใช้ประโยชน์ได้มากที่สุด เช่น การจัดเรียงสิ่งของในการขนส่งหรือ การออกแบบสิ่งของต่างๆ เป็นต้น

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1.3.1 ศึกษาเฉพาะการซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่านั้น

1.3.2 ศึกษาเฉพาะการแปลงทางเรขาคณิตแบบการหมุนและการเลื่อนขนาน

1.4 ระยะเวลาทำโครงงาน

งานวิจัยมีระยะเวลา 9 เดือน เริ่มตั้งแต่ พฤษภาคม พ.ศ. 2557 – มกราคม พ.ศ. 2558

1.5 สถานที่ทำโครงงาน

1.5.1 สาขาคณิตศาสตร์ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ 364 หมู่ 5 ตำบลศาลายา อำเภอพุทธมณฑล จังหวัดนครปฐม

1.5.2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 254 ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน จังหวัดกรุงเทพฯ

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.6.1 สามารถหาและแสดงวิธีการจัดวางรูปสามเหลี่ยมสองรูปซ้อนทับกันให้เกิดพื้นที่รวมน้อยที่สุด

1.6.2 สามารถนำวิธีการจัดวางดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ในการจัดวางสิ่งของเพื่อให้ใช้พื้นที่น้อยที่สุด เพื่อให้สามารถนำพื้นที่ที่เหลือมาใช้ประโยชน์ได้มากที่สุด เช่น การจัดเรียงสิ่งของในการขนส่งหรือ การออกแบบสิ่งของต่างๆ เป็นต้น

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทนิยามพื้นฐานทางเรขาคณิต

บทนิยาม 2.1.1 *จุด* เป็นสิ่งที่ใช้บอกตำแหน่ง (ไม่มีขนาด) นิยมใช้สัญลักษณ์แทนจุดด้วย $A,B,C,\ldots$

บทนิยาม 2.1.2 *เส้น* เป็นทางเดินของจุด ซึ่งมีเฉพาะความยาว และ ไม่มีความกว้าง

สัญลักษณ์ 2.1.3 $\overline{AB}$ แทนส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B

สัญลักษณ์ 2.1.4 AB แทนความยาวของส่วนของเส้นตรงระหว่างจุด A และ B

บทนิยาม 2.1.5 สามเหลี่ยม ABC คือบริเวณปิดล้อมด้วยเส้นตรง AB,BC,CA

บทนิยาม 2.1.6 มุมต่างๆ

2.1.6.1 *มุมแหลม* คือ มุมที่มีค่าเป็นบวก และ มีขนาดเล็กกว่า 90 องศา

2.1.6.2 *มุมฉาก* คือ มุมที่มีค่าเป็นบวก และ มีขนาด 90 องศา

2.1.6.3 *มุมป้าน* คือ มุมที่มีค่าเป็นบวก และ มีขนาดมากกว่า 90 องศา และเล็กกว่า 180 องศา

2.1.6.4 *มุมกลับ* คือ มุมที่มีค่าเป็นบวก และ มีขนาดมากกว่า 180 องศา และน้อยกว่า 360 องศา

บทนิยาม 2.1.7 รูปสามเหลี่ยมชนิดต่างๆ

2.1.7.1 *สามเหลี่ยมมุมแหลม* คือ สามเหลี่ยมที่มุมทุกมุมเป็นมุมแหลม

2.1.7.2 *สามเหลี่ยมมุมฉาก* คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งมุมเป็นมุมฉาก

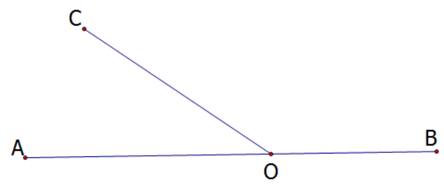
2.1.7.3 *สามเหลี่ยมมุมป้าน* คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งมุมเป็นมุมป้าน

2.1.7.4 *สามเหลี่ยมด้านเท่า* คือ สามเหลี่ยมที่ทั้งสามด้านยาวเท่ากัน

2.1.7.5 *สามเหลี่ยมมุมเท่า* คือ สามเหลี่ยมที่มุมทั้งสามมุมมีขนาดเท่ากัน

2.1.7.6 *สามเหลี่ยมหน้าจั่ว* คือ สามเหลี่ยมที่ด้านยาวเท่ากันสองด้าน (หรือ มุมเท่ากันสองมุม)

บทนิยาม 2.1.8



ภาพที่ 2.1.1 มุมประชิด

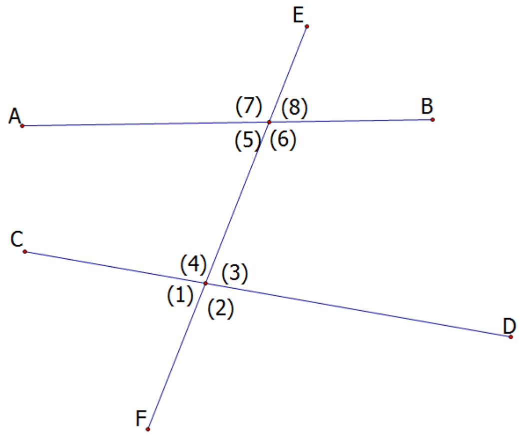
2.1.8.1 C เป็นจุดนอกเส้นตรง $\overline{AB}$ และ O เป็นจุดบนเส้นตรง $\overline{AB}$ ลากเส้นตรง $\overline{CO}$ มุม $A\hat{O}C$ และ $B\hat{O}C$ เรียกว่า *มุมประชิดของเส้นตรง*

2.1.8.2 มุมเส้นตรง $A\hat{O}B = 180^\circ$ และ 1 มุมฉาก คือ 90°

บทนิยาม 2.1.9 $\hat{A},\ \hat{B}$ เป็นมุมที่มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกและ $\hat{A}+\hat{B}=180^{\circ}$ แล้ว $\hat{A},\ \hat{B}$ เรียกว่า *มุมประกอบสองมุมฉาก* (supplementary angle) หรือ $\hat{A}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของ $\hat{B}$

บทนิยาม 2.1.10 $\hat{A},\ \hat{B}$ เป็นมุมที่มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกและ $\hat{A}+\hat{B}=90^{\circ}$ แล้ว $\hat{A},\ \hat{B}$ เรียกว่า *มุมประกอบหนึ่งมุมฉาก* (complementary angle) หรือ $\hat{A}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของ $\hat{B}$

บทนิยาม 2.1.11 เส้นตรง $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ เกิดมุม (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) ดังภาพ



ภาพที่ 2.1.2 ภาพประกอบบทนิยามที่ 2.1.11

มุม (1), (2), (7), (8) เรียกว่า *มุมภายนอก* (exterior angle)

มุม (3), (4), (5), (6) เรียกว่า *มุมภายใน* (interior angle) มุม (4), (6) เรียกว่า *มุมแย้ง* (alternate angle)

มุมภายใน (3) เรียกว่า *มุมภายในด้านตรงข้าม* (interior opposite) ของมุมภายนอก (7) ด้านเดียวกันของ $\overline{EF}$

มุมภายใน (4) และ มุมภายนอก (7) เรียกว่า *มุมที่สมนัยกัน* (corresponding angle)

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่ามุม (3), (5) เป็นมุมแย้ง

มุมภายใน (3) เป็นมุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอก (7) ด้านเดียวกันของ $\overline{EF}$

มุมภายใน (5) เป็นมุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอก (2) ด้านเดียวกันของ $\overline{EF}$

มุมภายใน (6) เป็นมุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอก (1) ด้านเดียวกันของ $\overline{EF}$

มุมภายใน (3) และ มุมภายนอก (8) เป็นมุมที่สมนัยกัน

มุมภายใน (5) และ มุมภายนอก (1) เป็นมุมที่สมนัยกัน

มุมภายใน (6) และ มุมภายนอก (2) เป็นมุมที่สมนัยกัน

บทนิยาม 2.1.12 *ส่วนสูง* คือ เส้นที่ลากจากจุดยอดมาตั้งฉากกับฐาน

บทนิยาม 2.1.13 *สี่เหลี่ยม* (quadrilateral) คือ บริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรงสี่เส้น

เส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดของสี่เหลี่ยมที่ตรงข้ามกัน เรียกว่า *เส้นทแยงมุม* (diagonal)

สี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน เรียกว่า *สี่เหลี่ยมด้านขนาน* (parallelogram)
สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมยอดหนึ่งเป็นมุมฉาก เรียกว่า *สี่เหลี่ยมผืนผ้า* (rectangle)
สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ด้านประกอบมุมยอดเดียวกันยาวเท่ากัน เรียกว่า *สี่เหลี่ยมจัตุรัส* (square)
สี่เหลี่ยมที่ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน เรียกว่า *สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน* (rhombus)
สี่เหลี่ยมที่ด้านขนานกันหนึ่งคู่ เรียกว่า *สี่เหลี่ยมคางหมู* (rhombus)

2.2 ทฤษฎีบทพื้นฐานทางเรขาคณิต

ทฤษฎีบท 2.2.1 มุมประชิดของเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งรวมกันเท่ากับ 2 มุมฉาก

ทฤษฎีบท 2.2.2 เส้นตรง 2 เส้นตัดกัน มุมทั้ง 4 มุมที่เกิดขึ้นรวมกันเท่ากับ 4 มุมฉาก

ทฤษฎีบท 2.2.3 ที่จุดปลาย O ของเส้นตรง $\overline{OC}$ มีเส้นตรง $\overline{OA}$ และ $\overline{OB}$ อยู่คนละด้านของเส้นตรง $\overline{OC}$ ถ้า $AOC + BOC = 180°$ แล้ว $\overline{OA}$ และ $\overline{OB}$ เป็นเส้นตรงเดียวกัน

ทฤษฎีบท 2.2.4 เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามต้องเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.2.5 ถ้าสามเหลี่ยมสองรูป มีด้านเท่ากันสองด้าน และ มุมระหว่างด้านที่เท่ากันมีขนาดของมุมเท่ากัน แล้ว สามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท 2.2.6 ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันทั้งสามคู่ แล้ว สามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท 2.2.7 ในสามเหลี่ยม มุมที่อยู่ด้านตรงข้ามด้านใหญ่ มีขนาดใหญ่กว่ามุมที่อยู่ด้านตรงข้ามด้านเล็ก

ทฤษฎีบท 2.2.8 ในสามเหลี่ยม ด้านที่อยู่ด้านตรงข้ามมุมใหญ่ มีขนาดยาวกว่าด้านที่อยู่ด้านตรงข้ามมุมเล็ก

ทฤษฎีบท 2.2.9 O เป็นจุดนอกเส้นตรง $\overline{AB}$ ในบรรดาเส้นตรงที่ลากจาก O มายังเส้นตรง $\overline{AB}$ เส้นที่ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ จะเป็นเส้นที่สั้นที่สุด

ทฤษฎีบท 2.2.10 เส้นตรง $\overline{EF}$ ตัดเส้นตรง $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่ G และ H ตามลำดับ จะได้

1. ถ้ามุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้ว $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ขนานกัน
2. ถ้ามุมภายนอก และ มุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอกด้านเดียวกันของ $\overline{EF}$ มีขนาดเท่ากันแล้ว $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ขนานกัน
3. ถ้ามุมภายในด้านเดียวกันของ $\overline{EF}$ รวมกันเท่ากับสองมุมฉาก แล้ว $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ขนานกัน

ทฤษฎีบท 2.2.11 เส้นตรง $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ขนานกัน และ เส้นตรง $\overline{EF}$ ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด G และ H ตามลำดับ จะได้

1. มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
2. มุมภายนอก และ มุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอกด้านเดียวกันของ $\overline{EF}$ มีขนาดเท่ากัน
3. มุมภายในด้านเดียวกันของ $\overline{EF}$ รวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

ทฤษฎีบท 2.2.12 เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกับเส้นตรงเดียวกันต้องขนานกัน

ทฤษฎีบท 2.2.13 ผลบวกมุมภายในรูป n เหลี่ยมเท่ากับ $(n-2)(180^\circ)$

ทฤษฎีบท 2.2.14 ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันสองมุม และ มีด้านตรงข้ามมุมคู่ที่เท่ากันมีความยาวเท่ากัน แล้ว สามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท 2.2.15 ถ้าสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากันและด้านประกอบมุมฉากเท่ากันหนึ่งด้าน แล้ว สามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท 2.2.16 พื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก เท่ากับ ความยาวด้านกว้างคูณกับความยาวด้านยาว

ทฤษฎีบท 2.2.17 พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน เท่ากับ ความยาวฐานคูณกับความยาวส่วนสูง

ทฤษฎีบท 2.2.18 สามเหลี่ยมที่มีฐานเดียวกันกับสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีความสูงเท่ากัน จะมีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ทฤษฎีบท 2.2.19 พื้นที่สามเหลี่ยม เท่ากับ ครึ่งหนึ่งของความยาวฐานคูณกับความยาวส่วนสูง

ทฤษฎีบท 2.2.20 สามเหลี่ยมที่มีฐานเดียวกัน และ อยู่ระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน มีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.2.21 พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู เท่ากับ ครึ่งหนึ่งของส่วนสูงคูณผลบวกความยาวด้านคู่ขนาน

ทฤษฎีบท 2.2.22 ให้ X เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่านด้าน $\overline{AB}$ และ Y เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่านด้าน $\overline{AC}$ ของ ΔABC และ $\overline{XY}$ ขนานกับ $\overline{BC}$ จะได้ $AX : XB = AY : YC$

ทฤษฎีบท 2.2.23 ให้ X เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่านด้าน $\overline{AB}$ และ Y เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่านด้าน $\overline{AC}$ ของ ΔABC และ $AX : XB = AY : YC$ จะได้ $\overline{XY}$ ขนานกับ $\overline{BC}$

2.3 ทฤษฎีบทเรขาคณิตกับตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบท 2.3.1 *(กฎของไซน์, law of sine)* สำหรับ ΔABC ใดๆ จะได้ว่า

$$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c} = \frac{2\Delta}{abc}$$

เมื่อ a, b, c แทนความยาวด้าน $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ ตามลำดับ และ Δ แทนพื้นที่ ΔABC

2.4 การเลื่อนขนานและการหมุน

บทนิยาม 2.4.1 *การสะท้อน (Reflection)*

P' เป็นภาพสะท้อนของ P เทียบกับเส้นตรง L ก็ต่อเมื่อ เส้นตรง L แบ่งครึ่งและตั้งฉาก PP' และจะเรียก เส้นตรง L ว่า *เส้นสมมาตร*

บทนิยาม 2.4.2 *การเลื่อนขนาน (Translation)*

P' เป็นการเลื่อนขนานของ P ก็ต่อเมื่อ P' เป็นการสะท้อนสองครั้งข้ามเส้นของการสะท้อนที่ขนานกัน

บทนิยาม 2.4.3 *การหมุน (Rotation)*

P' เป็นการหมุนของ P ก็ต่อเมื่อ P' เป็นการสะท้อนสองครั้งข้ามเส้นของการสะท้อนที่ตัดกัน จุดตัดของเส้นสะท้อนเรียกว่า *จุดศูนย์กลางของการหมุน* (Center of the rotation)

2.5 การซ้อนทับของรูปหลายเหลี่ยม 2 รูป ภายใต้การเลื่อนขนาน

ให้ P เป็นรูป n เหลี่ยมในระนาบ และ ให้ Q เป็นรูป m เหลี่ยมในระนาบ จากงานวิจัยของ Mark de Berg และคณะ พบว่าพื้นที่ซ้อนทับของทั้งสองเมื่อมีจุดเซนทรอยด์ หรือจุดตัดเส้นแบ่งครึ่งฐานจากมุมทั้งสาม จะมีค่าระหว่าง 9/25 และ 4/9 ของพื้นที่ซ้อนทับสูงสุดของทั้งสอง

2.6 การตรวจหาว่ารูปหลายเหลี่ยมนูนสองรูปใดๆ ซ้อนทับกันหรือไม่

การตรวจหาว่ารูปหลายเหลี่ยมนูนสองรูปใดๆ ซ้อนทับกันหรือไม่ ใช้หลักการของ separating axis theorem โดยทฤษฎีนั้นได้กล่าวไว้ว่า ถ้ารูปหลายเหลี่ยมนูนสองมิติใดๆ ไม่ตัดกันหรือมีส่วนที่ซ้อนทับกัน จะได้ว่าจะมีแกนบางแกนที่เป็นลักษณะของเส้นตรงที่เมื่อทำการฉายทุกจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมสองรูปนั้นจะไม่มีจุดยอดของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไปอยู่บนส่วนของเส้นตรงที่ยาวที่สุดที่เกิดจากการเชื่อมจุดที่ถูก ฉายของสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งเลย

บทที่ 3
วิธีดำเนินการทดลอง

3.1 เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา

3.1.1 อุปกรณ์เครื่องเขียนทั่วไป เช่น ดินสอ ยางลบ ไม้บรรทัด กระดาษทด

3.1.2 คอมพิวเตอร์

3.1.3 โปรแกรม The Geometers Sketchpad (Version 4.06)

3.2 วิธีดำเนินการศึกษา

3.2.1 การศึกษาเบื้องต้น

3.2.1.1 ศึกษาหาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาข้อนี้ว่ามีปัญหารูปแบบใดแล้วบ้างที่คิดขึ้นมาแล้ว และสำรวจว่ามีเงื่อนไขใดที่เป็นประโยชน์และสามารถนำมาขยายต่อได้

3.2.1.2 นำข้อมูลที่ได้มารวบรวมให้เป็นหมวดหมู่

3.2.2 การแก้ปัญหาวิธีการการวางสามเหลี่ยมสองรูปซ้อนทับกันให้เกิดพื้นที่รวมน้อยที่สุด

3.2.2.1 พิจารณารูปแบบการวางรูปสามเหลี่ยมสองรูปในกรณีต่างๆ โดยใช้โปรแกรม GSP ช่วยในการวิเคราะห์หาว่ากรณีใดที่สามารถทำการแปลงให้มีพื้นที่ซ้อนทับมากขึ้นได้บ้าง ซึ่งจะได้ว่าการจัดเรียงแบบนั้นจะไม่ใช่แบบที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุด

3.2.2.2 พิจารณากรณีที่เหลือซึ่งไม่สามารถหาวิธีแปลงให้พื้นที่มากขึ้นได้ จากนั้นหาตำแหน่งที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับน้อยที่สุดสำหรับกรณีนั้นๆ โดยใช้โปรแกรม GSP ช่วยในการหาข้อคาดการณ์ พิสูจน์ แล้วนำของแต่ละกรณีมาเปรียบเทียบกัน

3.2.3 ตรวจทานและจัดพิมพ์

3.2.3.1 ตรวจสอบการพิสูจน์และปรับปรุงแก้ไข

3.2.3.2 นำวิธีแก้ปัญหาที่ได้ทั้งหมดรวมเป็นหมวดหมู่ เรียบเรียงเนื้อหาและบทพิสูจน์ แล้วจัดพิมพ์เป็นรูปเล่ม

บทที่ 4
ผลการทดลอง

สัญลักษณ์ 4.1 $\left[\mathcal{A}\right]$ แทนพื้นที่ของรูปร่าง $\mathcal{A}$

4.1 การตัดกรณีการวางสามเหลี่ยมสองรูปที่ไม่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับสูงสุด

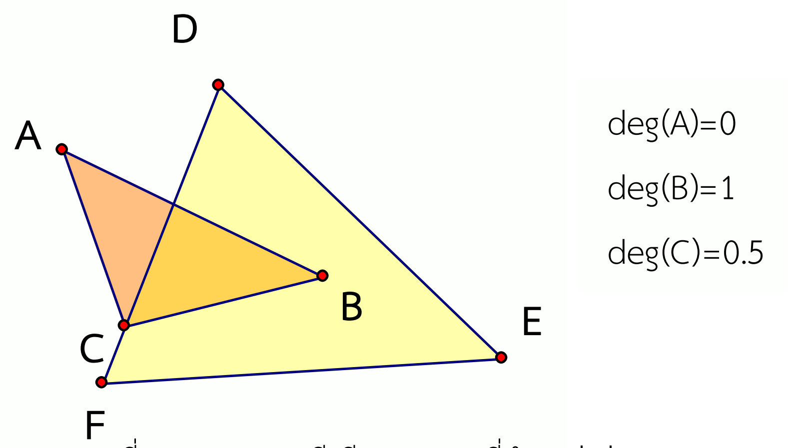
ขั้นแรกจะนิยามสัญลักษณ์เพื่อใช้ในการช่วยแบ่งกรณีว่าสามเหลี่ยมสองรูปจะจัดวางอย่างไรได้บ้าง

บทนิยาม 4.1.1 สำหรับจุดยอด A ของสามเหลี่ยมใดๆ *ดีกรีของจุด* A แทนด้วย $deg(A)$ คือด้วยค่าที่แสดงตำแหน่งของจุด A เทียบกับสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง โดยที่

$deg\left(A\right) = 0;$ เมื่อ A อยู่ภายนอก ΔABC

$deg\left(A\right) = 0.5;$ เมื่อ A อยู่บนเส้นรอบรูปหรือจุดยอดมุมของ ΔABC

$deg\left(A\right) = 1;$ เมื่อ A อยู่ภายใน ΔABC



รูปที่ 4.1.1 รูปแสดงดีกรีของจุดยอดที่ตำแหน่งต่างๆ

บทนิยาม 4.1.2 สำหรับสามเหลี่ยม ABC ใดๆ *ดีกรีของ* ABC แทนด้วย $deg(\Delta ABC)$ คือผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งสามจุดของรูปสามเหลี่ยม ABC

บทนิยาม 4.1.2 สำหรับระนาบใดๆ *ดีกรีระนาบ* แทนด้วย deg_T คือผลรวมของดีกรีของรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดบนระนาบ

จากบทนิยามข้างต้นจะพิสูจน์บทตั้งต่อไปนี้เพื่อให้สามารถแบ่งกรณีได้ง่ายขึ้น

บทตั้ง 4.1.1 *ถ้า* ΔABC *และ* ΔDEF *เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปบนระนาบ แล้ว* $deg_T \leq 3$

บทพิสูจน์ ซึ่งจะแบ่งการพิสูจน์บทตั้งดังกล่าวออกเป็น 3 ส่วน ดังนี้

บทตั้งที่ 4.1.1.1 *ถ้าจุดยอดทุกจุดของ* ΔABC *มีดีกรีเท่ากัน แล้ว* $deg_T \leq 3$

บทตั้งที่ 4.1.1.2 *ถ้ามีจุดยอดของ* ΔABC *เพียง 2 จุดเท่านั้นที่มีดีกรีเท่ากัน แล้ว* $deg_T \leq 3$

บทตั้งที่ 4.1.1.3 *ถ้าจุดยอดทุกจุดของ* ΔABC *มีดีกรีแตกต่างกันทั้งหมด แล้ว* $deg_T \leq 3$

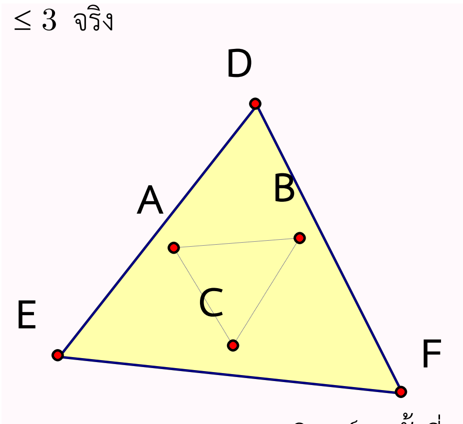
บทตั้งที่ 4.1.1.1 แบ่งออกเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ดีกรีของจุดยอดทุกจุดของ ΔABC เท่ากับ 1 จะได้ว่า จุด A จุด B และจุด C ต้องอยู่ภายใน ΔDEF ดังนั้น จุด D จุด E และจุด F ต้องอยู่ภายนอก ΔABC

$$deg_T = \deg(A) + \deg(B) + \deg(C) + \deg(D) + \deg(E) + \deg(F)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 3$$

กรณีนี้ได้ว่า $deg_T \leq 3$ จริง



ภาพที่ 4.1.1.1.1 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.1 กรณีที่ 1

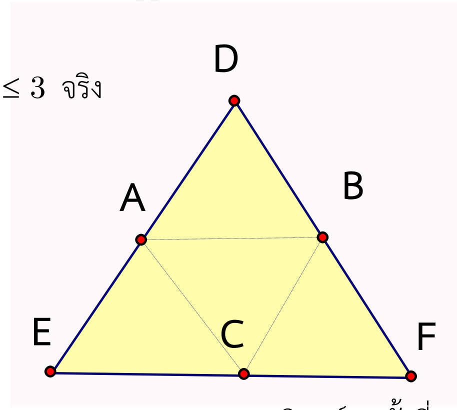
กรณีที่ 2 ดีกรีของจุดยอดทุกจุดของ ΔABC เท่ากับ 0.5 จะได้ว่า จุด A จุด B และจุด C ต้องอยู่บนด้านหรือจุดยอดของ ΔDEF ดังนั้น จุด D จุด E และจุด F ต้องอยู่ภายนอก ΔABC หรือเป็นจุดเดียวกันกับจุดยอดของ ΔABC

นั่นคือ $deg(D) + deg(E) + deg(F) \leq 0.5 + 0.5 + 0.5 = 1.5$

$$deg_T = \deg(A) + \deg(B) + \deg(C) + \deg(D) + \deg(E) + \deg(F)$$

$$\leq 1.5 + 1.5 = 3$$

กรณีนี้ได้ว่า $deg_T \leq 3$ จริง



ภาพที่ 4.1.1.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1 กรณีที่ 2

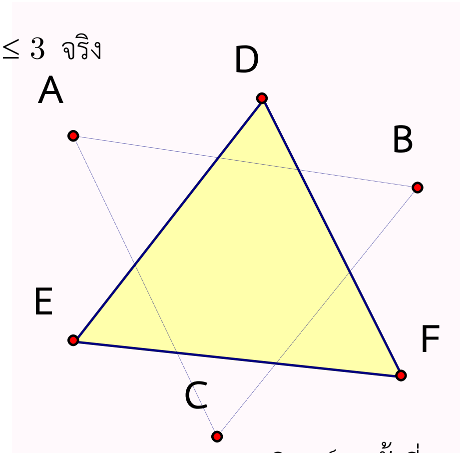
กรณีที่ 3 ดีกรีของจุดยอดทุกจุดของ ΔABC เท่ากับ 0 เนื่องจากดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดมีค่าไม่เกิน 1 ดังนั้น

$$deg(D) + deg(E) + deg(F) \leq 1 + 1 + 1 = 3$$

$$deg_T = \deg(A) + \deg(B) + \deg(C) + \deg(D) + \deg(E) + \deg(F)$$

$$\leq 0 + 3 = 3$$

กรณีนี้ได้ว่า $deg_T \leq 3$ จริง



ภาพที่ 4.1.1.1.3 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1 กรณีที่ 3

จากทั้ง 3 กรณี จึงสรุปได้ว่า ถ้าจุดยอดทุกจุดของ ΔABC มีดีกรีเท่ากัน แล้ว $deg_T \leq 3$

บทตั้งที่ 4.1.1.2 แบ่งออกเป็น 6 กรณี ดังนี้

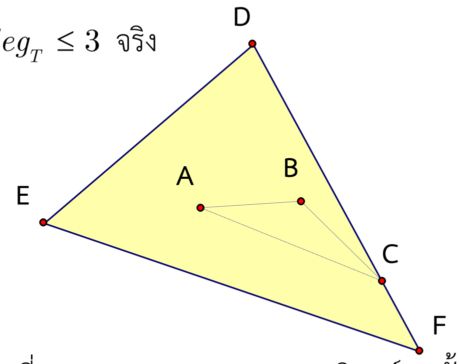
กรณีที่ 1 จุดยอด 2 จุดของ ΔABC มีดีกรีเท่ากับ 1 อีกจุดหนึ่งมีดีกรีเท่ากับ 0.5

ให้ $deg(A)$ และ $deg(B)$ เท่ากับ 1 ส่วน $deg(C)$ เท่ากับ 0.5 จะได้ว่า จุด A และจุด B อยู่ภายใน ΔDEF ส่วนจุด C อยู่บนด้านหรือจุดยอดของ ΔDEF

ดังนั้น $deg(D) + deg(E) + deg(F) \leq 0 + 0 + 0.5 = 0.5$

$$deg_T = \deg(A) + \deg(B) + \deg(C) + \deg(D) + \deg(E) + \deg(F)$$
$$\leq 0 + 3 = 3$$

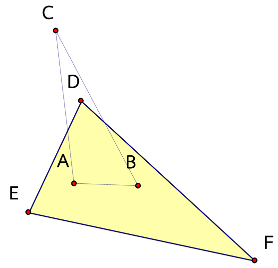
กรณีนี้ได้ว่า $deg_T \leq 3$ จริง



ภาพที่ 4.1.1.2.1 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 1

กรณีที่ 2 จุดยอด 2 จุดของ ΔABC มีดีกรีเท่ากับ 1 อีกจุดหนึ่งมีดีกรีเท่ากับ 0

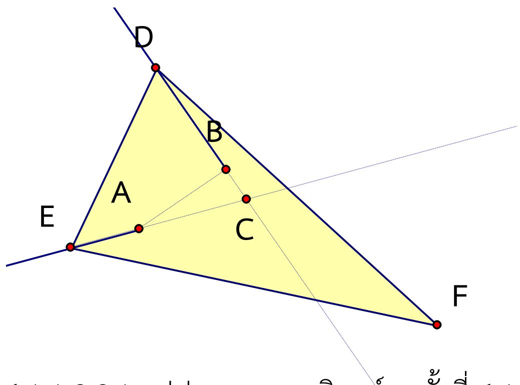
ให้ $deg(A)$ และ $deg(B)$ เท่ากับ 1 ส่วน $deg(C)$ เท่ากับ 0 จะพิสูจน์ว่า ΔDEF ไม่สามารถมีจุดยอดที่มีดีกรีมากกว่า 0 ได้เกิน 1 จุด โดยการหาข้อขัดแย้ง



ภาพที่ 4.1.1.2.2 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 2

สมมติให้จุด D และจุด E เป็นจุดยอด 2 จุดของ ΔDEF ที่มีดีกรีมากกว่า 0 จะได้ว่า จุด D และจุด E ต้องอยู่บนด้านของ ΔABC หรืออยู่ภายใน ΔABC ซึ่งจะพิจารณาเป็น 3 กรณี ดังนี้

2.1 จุด D และจุด E อยู่บนด้านของ ΔABC



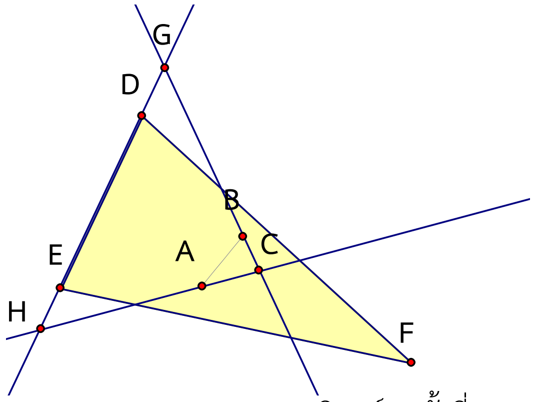
ภาพที่ 4.1.1.2.2.1 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 2.1

เนื่องจากจุด A และจุด B อยู่ภายใน ΔDEF จะได้ว่ามุม $E\hat{D}B$ มีขนาดเล็กกว่ามุม $E\hat{D}F$ และมุม $A\hat{E}D$ มีขนาดเล็กกว่ามุม $D\hat{E}F$

เมื่อต่อส่วนของเส้นตรง $\overline{DB}$ และ $\overline{AE}$ เส้นตรงทั้งสองจะตัดกันภายใน ΔABC ได้ว่า จุด C จะอยู่ภายใน ΔDEF ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $deg(C) = 0$

ดังนั้น จุด D และจุด E ไม่สามารถอยู่บนด้านของ ΔABC ในขณะเดียวกันได้

2.2 จุด D และจุด E อยู่ภายใน ΔABC



ภาพที่ 4.1.1.2.2.2 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 2.2

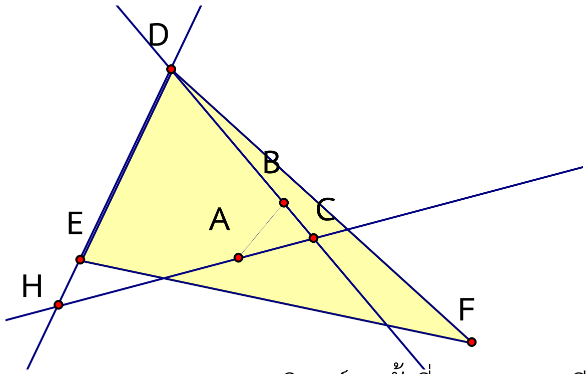
จะได้ว่ามีจุด G และจุด H บนส่วนต่อของ $\overline{DE}$ ที่ทำให้ส่วนของเส้นตรง $\overline{BG}$ และ $\overline{AH}$ อยู่บนด้าน $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ

พิจารณามุม $B\hat{G}D$ มีขนาดเล็กกว่ามุม $F\hat{D}E$ และมุม $A\hat{H}E$ มีขนาดเล็กกว่ามุม $F\hat{E}D$

เมื่อต่อส่วนของเส้นตรง $\overline{GB}$ และ $\overline{HA}$ เส้นตรงทั้งสองจะตัดกันภายใน ΔABC ได้ว่า จุด C จะอยู่ภายใน ΔDEF ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $deg(C) = 0$

ดังนั้น จุด D และจุด E ไม่สามารถอยู่ภายใน ΔABC ในขณะเดียวกันได้

2.3 จุด D อยู่บนด้านของ ΔABC และ E อยู่ภายใน ΔABC



ภาพที่ 4.1.1.2.2.3 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 2.3

เนื่องจาก E อยู่ภายใน ΔABC จะได้ว่ามีจุด H บนส่วนต่อของ $\overline{DE}$ ที่ทำให้ $\overline{AH}$ อยู่บนด้าน $\overline{BC}$

พิจารณามุม $A\hat{H}E$ มีขนาดเล็กกว่ามุม $F\hat{E}D$

เนื่องจากจุด B อยู่ภายใน ΔDEF จะได้ว่ามุม $E\hat{D}B$ มีขนาดเล็กกว่ามุม $E\hat{D}F$

เมื่อต่อส่วนของเส้นตรง $\overline{DB}$ และ $\overline{HA}$ เส้นตรงทั้งสองจะตัดกันภายใน ΔABC

ได้ว่า จุด C จะอยู่ภายใน ΔDEF ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $deg\left(C\right)=0$

ดังนั้น จุด E ไม่สามารถอยู่ภายใน ΔABC และจุด D ไม่สามารถอยู่บนด้านของ ΔABC ในขณะเดียวกันได้

จากทั้ง 3 กรณี สรุปได้ว่า เมื่อ $deg(A)=deg(B)=1$ และ $deg\left(C\right)=0$ ดังนั้น ΔDEF ไม่สามารถมีจุดยอดที่มีดีกรีมากกว่า 0 เกิน 1 จุดได้ นั่นคือ

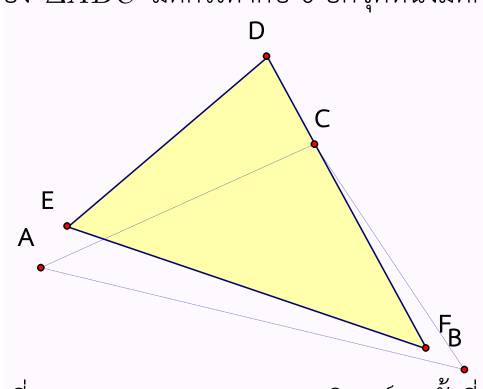
$deg(D)+deg(E)+deg(F)\le 1$

$deg_T=\deg\left(A\right)+\deg\left(B\right)+\deg\left(C\right)+\deg\left(D\right)+\deg\left(E\right)+\deg\left(F\right)$

$\le 1+1+0+1=3$

กรณีนี้ได้ว่า $deg_T\le 3$ จริง

กรณีที่ 3 จุดยอด 2 จุดของ ΔABC มีดีกรีเท่ากับ 0 อีกจุดหนึ่งมีดีกรีเท่ากับ 0.5



ภาพที่ 4.1.1.2.3 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 3

ให้ $deg(A)$ และ $deg(B)$ เท่ากับ 0 ส่วน $deg(C)$ เท่ากับ 0.5

จะพิสูจน์ว่า $deg(D)+deg(E)+deg(F)<3$ เสมอโดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้ $deg\left(D\right)+deg\left(E\right)+deg\left(F\right)=3$

นั่นคือ $deg(D)=1, deg(E)=1$ และ $deg(F)=1$

หมายความว่า จุด A จุด B และจุด C ต้องอยู่ภายนอก ΔDEF ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $deg(C)=0.5$

ดังนั้น $deg(D)+deg(E)+deg(F)<3$

นั่นคือ $deg(D)+deg(E)+deg(F)\leq 2.5$

จึงได้ว่า

$$deg_T = \deg(A)+\deg(B)+\deg(C)+\deg(D)+\deg(E)+\deg(F)$$

$$\leq 0+0+0.5+2.5=3$$

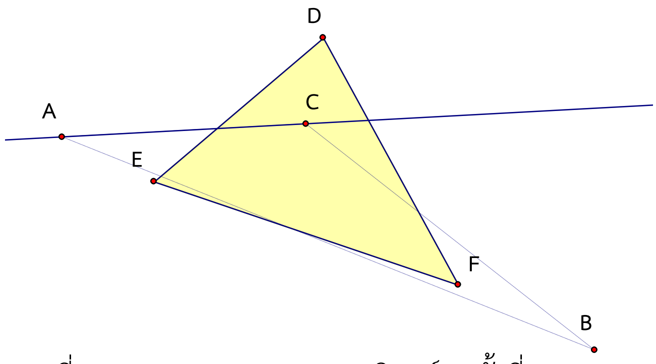
กรณีนี้ได้ว่า $deg_T \leq 3$ จริง

กรณีที่ 4 จุดยอด 2 จุดของ ΔABC มีดีกรีเท่ากับ 0 อีกจุดหนึ่งมีดีกรีเท่ากับ 1

ให้ $deg(A)$ และ $deg(B)$ เท่ากับ 0 ส่วน $deg(C)$ เท่ากับ 1

เนื่องจากจุด C อยู่ภายใน ΔDEF ได้ว่าเส้นตรง $\overline{AC}$ จะแบ่งจุดยอดของ ΔDEF ออกเป็น 2 ส่วนเสมอ คือส่วนที่อยู่ทางซ้ายและส่วนที่อยู่ทางขวาของเส้นตรง $\overline{AC}$

พิจารณามุม $B\hat{C}A$ มีขนาดเล็กกว่า 180° เสมอ



ภาพที่ 4.1.1.2.4 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 4

จะได้ว่า ΔABC สามารถครอบคลุมจุดยอดของ ΔDEF ได้เพียงส่วนเดียวเมื่อเทียบกับด้าน $\overline{AC}$

ดังนั้น ΔABC สามารถครอบคลุมจุดยอดของ ΔDEF ได้อย่างมาก 2 จุด

นั่นคือ $deg(A)+deg(B)+deg(C)=1$

$deg(D)+deg(E)+deg(F)\leq 2$

ดังนั้น

$$deg_T=\deg(A)+\deg(B)+\deg(C)+\deg(D)+\deg(E)+\deg(F)$$

$$\leq 1+2=3$$

กรณีนี้ได้ว่า $deg_T \leq 3$ จริง

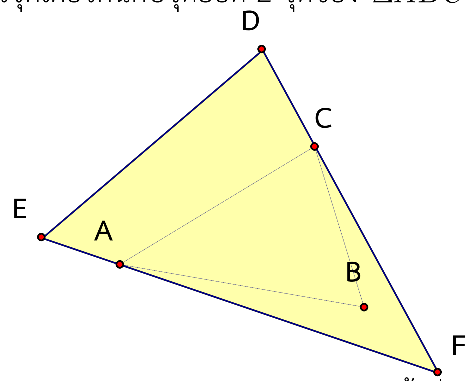
กรณีที่ 5 จุดยอด 2 จุดของ ΔABC มีดีกรีเท่ากับ 0.5 อีกจุดหนึ่งมีดีกรีเท่ากับ 1

ให้ $deg(A)$ และ $deg(B)$ เท่ากับ 0.5 ส่วน $deg(C)$ เท่ากับ 1

นั่นคือ จุด A และจุด B อยู่บนด้านของ ΔDEF ส่วนจุด C อยู่ภายใน ΔDEF

ดังนั้น ΔABC แนบใน ΔDEF

จะได้ว่า $deg(D)+deg(E)+deg(F)$ มีค่าได้มากที่สุดเท่ากับ 1 เมื่อจุดยอด 2 จุดของ ΔDEF เป็นจุดเดียวกันกับจุดยอด 2 จุดของ ΔABC



ภาพที่ 4.1.1.2.5 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 5

ดังนั้น

$$degT=\deg(A)+\deg(B)+\deg(C)+\deg(D)+\deg(E)+\deg(F)$$

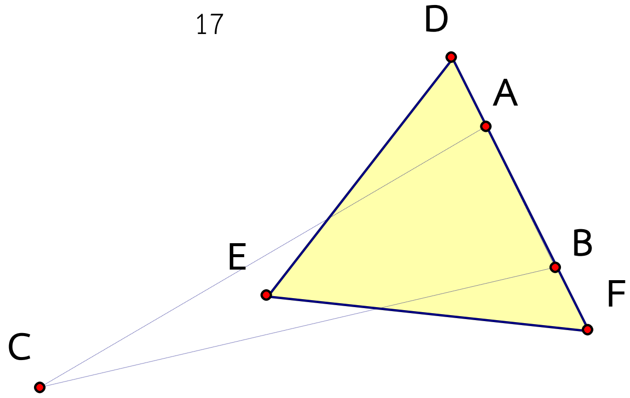
$$\leq 0.5+0.5+1+1=3$$

กรณีนี้ได้ว่า $deg_T \leq 3$ จริง

กรณีที่ 6 จุดยอด 2 จุดของ ΔABC มีดีกรีเท่ากับ 0.5 อีกจุดหนึ่งมีดีกรีเท่ากับ 0

ให้ $deg(A)$ และ $deg(B)$ เท่ากับ 0.5 ส่วน $deg(C)$ เท่ากับ 0 ซึ่งจะพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

1) A และ B อยู่บนด้านเดียวกันของ ΔDEF



ภาพที่ 4.1.1.2.6.1.1 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 6.1 รูปที่ 1

ให้ A และ B อยู่บนด้าน $\overline{DF}$ เนื่องจาก C อยู่ภายนอก ΔDEF จะได้ว่า C สามารถอยู่บนด้านเดียวกันหรือด้านตรงกันข้ามกับจุด E เมื่อเทียบกับด้าน $\overline{DF}$

- ถ้า C อยู่บนด้านเดียวกันกับจุด E จะสามารถหาตำแหน่งของ C ที่ทำให้ ΔABC ครอบคลุมจุด E

  พิจารณาจุด D และจุด F

  $deg(D)$ และ $deg(F)$ มีค่าอย่างมากเท่ากับ 0.5 เมื่อจุด A และ B เป็นจุดเดียวกันกับจุด D และจุด F

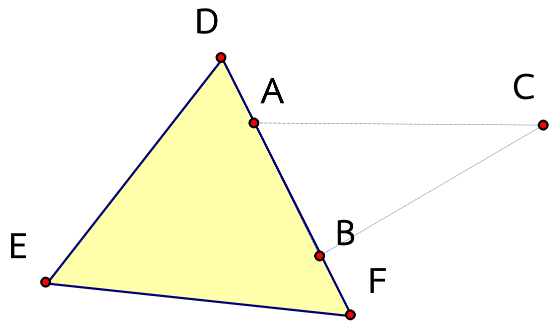
  นั่นคือ $deg\left(A\right)+deg\left(B\right)+deg\left(C\right)=0.5+0.5+0=1$

  $deg(D)+deg(E)+deg(F)\leq 0.5+1+0.5=2$

  $$deg_T=\deg\left(A\right)+\deg\left(B\right)+\deg\left(C\right)+\deg\left(D\right)+\deg\left(E\right)+\deg\left(F\right)$$

  $$\leq 1+2=3$$

- ถ้า C อยู่บนด้านตรงกันข้ามกับจุด E จะได้ว่า $deg(E)$ เท่ากับ 0



ภาพที่ 4.1.1.2.6.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 6.1 รูปที่ 2

พิจารณาจุด D และจุด F

$deg(D)$ และ $deg(F)$ มีค่าอย่างมากเท่ากับ 0.5 เมื่อจุด A และ B เป็นจุดเดียวกันกับจุด D และจุด F

นั่นคือ $deg(A)+deg(B)+deg(C)=0.5+0.5+0=1$

$deg(D)+deg(E)+deg(F)\leq 0.5+0+0.5=1$

$$deg_T=\deg(A)+\deg(B)+\deg(C)+\deg(D)+\deg(E)+\deg(F)$$

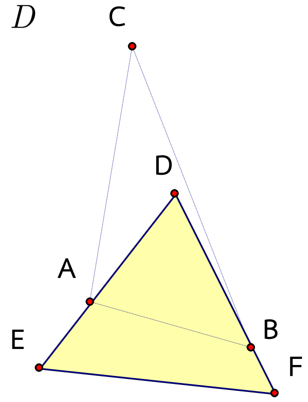
$$\leq 1+1=2$$

2) A และ B อยู่บนด้านที่ต่างกันของ ΔDEF

ให้ A และ B อยู่บนด้าน $\overline{DE}$ และ $\overline{DF}$ ตามลำดับ

เนื่องจาก C อยู่ภายนอก ΔDEF จะได้ว่า C สามารถอยู่บนด้านเดียวกันหรือด้านตรงกันข้ามกับจุด D เมื่อเทียบกับด้าน $\overline{AB}$

- ถ้า C อยู่บนด้านเดียวกันกับจุด D จะสามารถหาตำแหน่งของ C ที่ทำให้ ΔABC ครอบคลุมจุด D



ภาพที่ 4.1.1.2.6.2 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 6.2

พิจารณาจุด E และจุด F

$deg(E)$ และ $deg(F)$ มีค่าอย่างมากเท่ากับ 0.5 เมื่อจุด A และ B เป็นจุดเดียวกันกับจุด E และจุด F

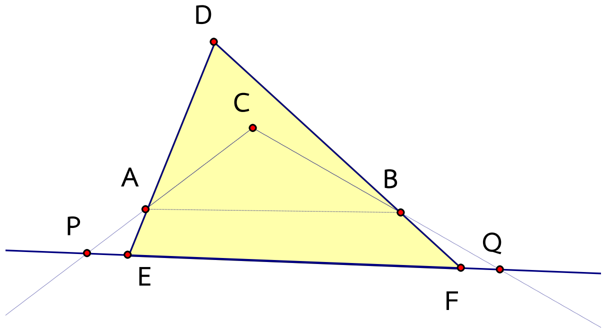
นั่นคือ $deg(A)+deg(B)+deg(C)=0.5+0.5+0=1$

$deg(D)+deg(E)+deg(F)\leq 1+0.5+0.5=2$

$$deg_T=\deg(A)+\deg(B)+\deg(C)+\deg(D)+\deg(E)+\deg(F)$$

$$\leq 1+2=3$$

- ถ้า C อยู่บนด้านตรงกันข้ามกับจุด D จะพิสูจน์ว่า C ไม่สามารถทำให้ ΔABC ครอบคลุมจุด E และ F ได้ในขณะเดียวกัน โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ ΔABC ครอบคลุมจุด E และ F ได้ในขณะเดียวกัน
  จะได้ว่ามีจุด P และจุด Q บนส่วนต่อของ $\overline{EF}$ ที่ทำให้ส่วนของเส้นตรง $\overline{AP}$ และ $\overline{BQ}$ อยู่บนเส้นตรง $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ



ภาพที่ 4.1.1.2.6.3 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.2 กรณีที่ 6.3

พิจารณา มุม $A\hat{P}E$ มีขนาดเล็กกว่า $D\hat{E}F$

มุม $B\hat{Q}F$ มีขนาดเล็กกว่า $D\hat{F}E$

เมื่อต่อส่วนของเส้นตรง $\overline{AP}$ และ $\overline{BQ}$ เส้นตรงทั้งสองจะตัดกันภายใน ΔABC

ได้ว่า จุด C จะอยู่ภายใน ΔDEF ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $deg(C)=0$

ดังนั้น จุด C ไม่สามารถทำให้ ΔABC ครอบคลุมจุด E และ F ได้ในขณะเดียวกัน นั่นคือ $deg(A)+deg(B)+deg(C)=0.5+0.5+0=1$

$$deg(D)+deg(E)+deg(F)\leq 0+1+0=1$$

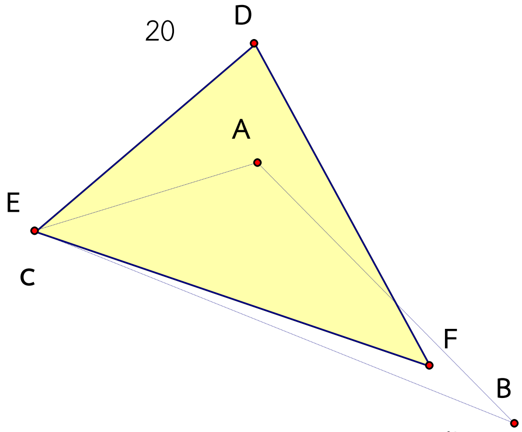
$$deg_T=\deg(A)+\deg(B)+\deg(C)+\deg(D)+\deg(E)+\deg(F)$$

$$\leq 1+1=2$$

ดังนั้น กรณีนี้ได้ว่า $deg_T \leq 3$ จริง

บทตั้งที่ 4.1.1.3 ถ้าจุดยอดทุกจุดของ ΔABC มีดีกรีแตกต่างกันทั้งหมด แล้ว $deg_T \leq 3$

ให้ $deg(A), deg(B)$ และ $deg(C)$ มีค่าเท่ากับ 1, 0 และ 0.5 ตามลำดับ



ภาพที่ 4.1.1.3 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งที่ 4.1.1.3

เนื่องจาก $deg(C) = 0.5$ ได้ว่าจุด C จะทำให้จุดยอดจุดหนึ่งของ ΔDEF มีค่าดีกรีได้อย่างมาก 0.5 (เมื่อจุด C เป็นจุดเดียวกันกับจุดยอดนั้นของ ΔDEF)

พิจารณาจุด A เนื่องจาก $deg(A)=1$ ดังนั้น A อยู่ภายใน ΔDEF

สร้างเส้นตรง $\overline{CA}$ ตัด ΔDEF ได้ว่า $\overline{CA}$ จะแบ่งจุด D, E, F ออกเป็น 2 ส่วนเมื่อเทียบกับเส้นตรง $\overline{CA}$ ดังนั้น จุด B สามารถทำให้ ΔABC ครอบคลุมจุดยอดของ ΔDEF ได้อย่างมาก 2 จุด

อย่างไรก็ตาม จุด B สามารถทำให้ ΔABC ครอบคลุมจุดยอด ΔDEF ได้เพียง 1 จุดเท่านั้น เพราะว่า จุดยอด C อยู่บนด้านหรือจุดยอดของ ΔDEF และจุด A อยู่ภายใน ΔDEF

นั่นคือ $deg(A) + deg(B) + deg(C) \leq 1 + 0 + 0.5 = 1.5$

$$deg(D) + deg(E) + deg(F) \leq 0 + 0.5 + 1 = 1.5$$

$$deg_T = deg(A) + deg(B) + deg(C) + deg(D) + deg(E) + deg(F) \leq 3$$

ต่อไปจะใช้บทตั้งที่ 4.1.1 ในการแบ่งกรณีของการจัดเรียงรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เป็นไปได้ทั้งหมด

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $deg(\Delta ABC) \geq deg(\Delta DEF)$ จากบทตั้งที่ 4.1.1 จะสามารถแบ่งกรณีของค่า deg_T ออกเป็น 7 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $deg_T = 3$

กรณีที่ 2 $deg_T = 2.5$

กรณีที่ 3 $deg_T = 2$

กรณีที่ 4 $deg_T = 1.5$

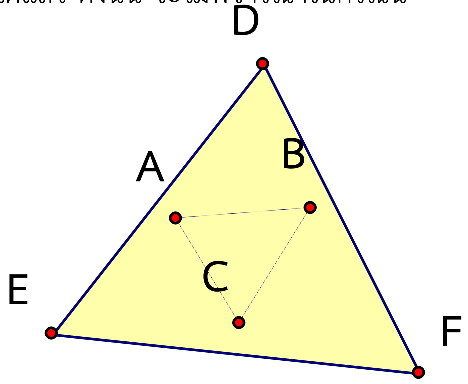
กรณีที่ 5 $deg_T = 1$

กรณีที่ 6 $deg_T = 0.5$

กรณีที่ 7 $deg_T = 0$

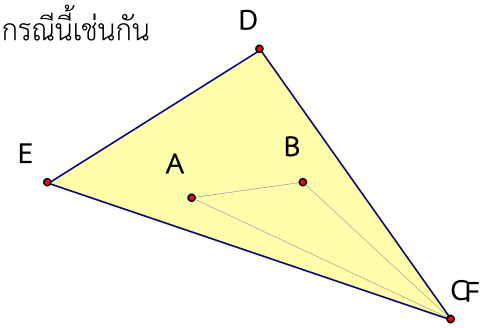
กรณีที่ 1 $deg_T = 3$ จะสามารถแบ่งกรณีดังกล่าวออกเป็น 4 กรณีย่อยๆ ได้ดังนี้

กรณีย่อยที่ 1.1 $deg(\Delta ABC) = 3$ และ $deg\left(\Delta DEF\right) = 0$ ในกรณีนี้ สามเหลี่ยม ABC ถูกสามเหลี่ยม DEF ซ้อนทับอย่างสมบูรณ์ดังรูป ทำให้ได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปคือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณาในกรณีนี้



ภาพที่ 4-1.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.1

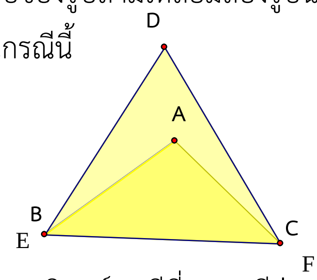
กรณีย่อยที่ 1.2 $deg(\Delta ABC) = 2.5$ และ $deg(\Delta DEF) = 0.5$ เช่นเดียวกันกับกรณีย่อยที่ 1 พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณาในกรณีนี้เช่นกัน



ภาพที่ 4-1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.2

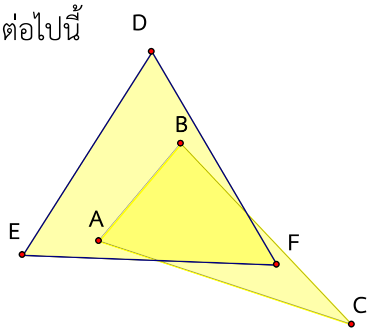
กรณีย่อยที่ 1.3 $deg(\Delta ABC) = 2$ และ $deg\left(\Delta DEF\right) = 1$ จะได้ว่าการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 2 รูปแบบ

1.3.1 ในรูปแบบดังกล่าว พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณาในกรณีนี้



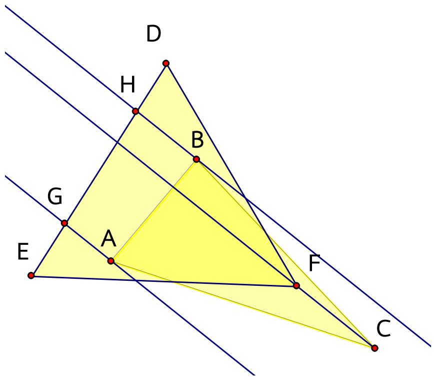
ภาพที่ 4-1.3.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.3 (1.3.1)

1.3.2 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4-1.3.2.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.3 (1.3.2 รูปที่1)

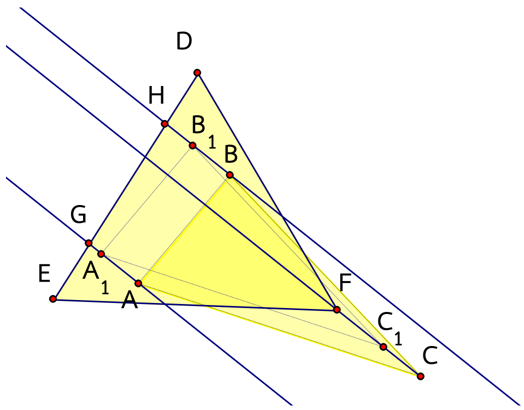
1) สร้างเส้นตรง $\overline{FC}$ และเส้นตรงที่ขนานกับ $\overline{FC}$ จำนวน 2 เส้น โดยเส้นหนึ่งผ่านจุด D และอีกเส้นหนึ่งผ่านจุด E
2) เลื่อนขนาน ΔABC ตามแนวรังสี $\overrightarrow{CF}$ โดยมีเงื่อนไขว่าจุด A และจุด B ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF



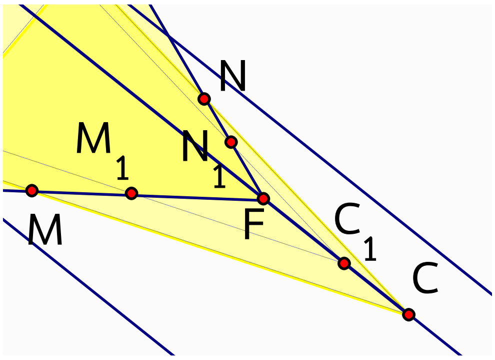
ภาพที่ 4-1.3.2.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.3 (1.3.2 รูปที่2)

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น



ภาพที่ 4-1.3.2.3 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.3 (1.3.2 รูปที่3)



ภาพที่ 4-1.3.2.4 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.3 (1.3.2 รูปที่4)

กำหนดให้ $\overline{CA}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด MC_1A_1 ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด M_1 และ $\overline{CB}$ ตัดกับ $\overline{DF}$ ที่จุด NC_1B_1 ตัดกับ DF ที่จุด N_1

พิจารณา ΔMFC และ ΔM_1FC_1 เนื่องจาก $\overline{M_1C_1}$ ขนานกับ $\overline{MC}$ และมุม $M_1\hat{F}C_1$ เป็นมุมร่วมกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป จะได้ว่า ΔM_1FC_1 คล้ายกับ ΔMFC ดังนั้น อัตราส่วนของพื้นที่รูป ΔM_1FC_1 ต่อรูป ΔMFC เท่ากับ $\dfrac{FC_1^{\,2}}{FC^2}$

และเนื่องจาก ΔABC ถูกเลื่อนขนานไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{CF}$ เกิดเป็น $\Delta A_1B_1C_1$ ดังนั้น $\overline{FC_1}$ ต้องสั้นกว่า $\overline{FC}$ จึงได้ว่า

$$FC_1 < FC$$

$$\frac{FC_1^{\,2}}{FC^2} < 1$$

$$\left[\Delta M_1FC_1\right] = \frac{FC_1^{\,2}}{FC^2} \times [\Delta MFC] < 1 \times [\Delta MFC]$$

$$[\Delta M_1FC_1] < [\Delta MFC]$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $[\Delta N_1FC_1] < [\Delta NFC]$ ดังนั้น

$$\left[N_1FM_1C_1\right] = \left[N_1FC_1\right] + \left[M_1FC_1\right] < \left[MFC\right] + \left[NFC\right] = [NFMC]$$

$$\left[N_1FM_1C_1\right] < \left[NFMC\right]$$

$$\left[A_1B_1C_1\right] - \left[N_1FM_1C_1\right] > \left[ABC\right] - [NFMC]$$

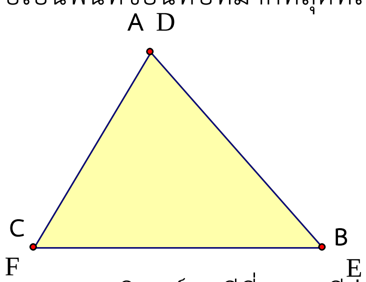
$$\left[A_1B_1N_1FM_1\right] > [ABNFM]$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

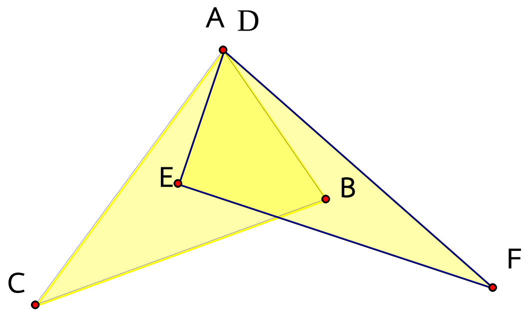
กรณีย่อยที่ 1.4 $deg(\Delta ABC) = 1.5$ และ $deg(\Delta DEF) = 1.5$ จะได้ว่าการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 2 รูปแบบ

1.4.1 ในกรณีนี้ สามเหลี่ยมทั้งสองรูปเป็นสามเหลี่ยมรูปเดียวกันทำให้ได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณาในกรณีนี้



ภาพที่ 4-1.4.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.4 (1.4.1)

1.4.2 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

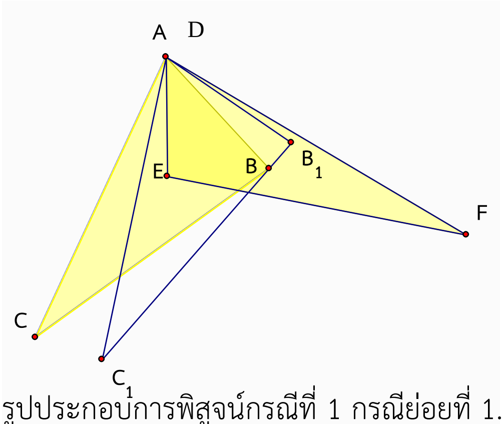


ภาพที่ 4-1.4.2.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.4 (1.4.2 รูปที่1)

1) ใช้ จุด A เป็นจุดหมุน หมุนรูป ΔABC ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาโดยมีเงื่อนไขว่า จุด B จะต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF

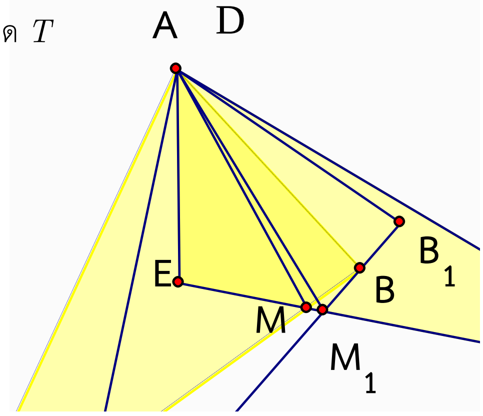
ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ ΔAB_1C_1 เมื่อ ΔAB_1C_1 คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการหมุนตามวิธีการข้างต้น



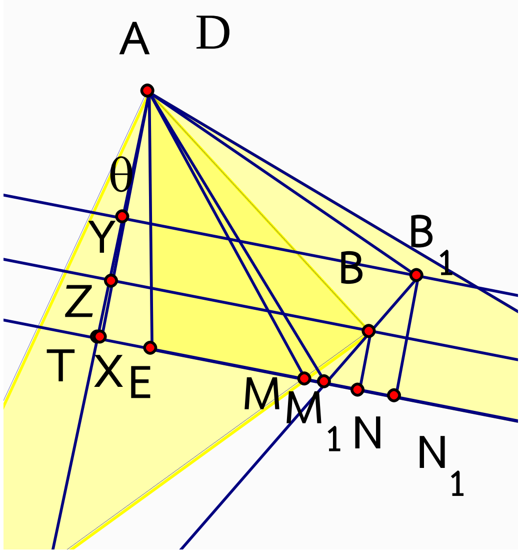
ภาพที่ 4-1.4.2.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.4 (1.4.2 รูปที่2)

กำหนดให้ $\overline{BC}$ และ $\overline{B_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด M และ M_1 ตามลำดับ ต่อ $\overline{EF}$ ไปพบ $\overline{AC_1}$ ที่จุด T



ภาพที่ 4-1.4.2.3 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.4 (1.4.2 รูปที่3)

จากจุด A,B และ B_1 สร้างเส้นตรงไปตั้งฉากกับ $\overline{EF}$ ที่จุด X,N และ N_1 ตามลำดับ



ภาพที่ 4-1.4.2.4 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 1 กรณีย่อยที่ 1.4 (1.4.2 รูปที่4)

สร้างเส้นขนาน $\overline{EF}$ สองเส้น เส้นหนึ่งผ่านจุด B ตัด $\overline{AX}$ ที่จุด Z อีกเส้นหนึ่งผ่านจุด B_1 ตัด $\overline{AX}$ ที่จุด Y

พิจารณา ΔABZ และ ΔAB_1Y

สมมติให้รูป ΔABC ถูกหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ จะได้ว่า $B\hat{A}B_1 = \theta$

$$B_1\hat{A}Y = B\hat{A}Z + \theta$$

$$XN = ZB = AB \times sinB\hat{A}Z$$

$$XN_1 = YB_1 = AB_1 \times sinB_1\hat{A}Y$$

เนื่องจาก $AB_1 = AB$ และ $B_1\hat{A}Y > B\hat{A}Z$

จะได้ว่า $AB_1 \times sinB_1\hat{A}Y > AB \times sinB\hat{A}Z$ นั่นคือ $XN_1 > XN$

เนื่องจาก $BN < B_1N_1$ และ B อยู่ทางด้านซ้ายมือของส่วนของเส้นตรง $\overline{B_1N_1}$

$\overline{B_1C_1}$ คือ ส่วนของเส้นตรงที่ถูกหมุนจาก $\overline{BC}$ จะได้ว่า $B\hat{M}N = B_1\hat{M}_1N_1 - \theta$

เนื่องจาก $XM < XM_1;TM < TM_1$ พิจารณา

$$\left[\Delta ATM\right] = \frac{1}{2} \times AX \times TM < \frac{1}{2} \times AX \times TM_1 = \left[\Delta ATM_1\right].$$

$$\therefore \left[\Delta ATM\right] < \left[\Delta ATM_1\right].$$

และพิจารณา $\left[\Delta ABM\right] = \frac{1}{2} \times AB \times BM \times \sin A\hat{B}M$

$$\left[\Delta ABM\right] < \frac{1}{2} \times AB_1 \times B_1M_1 \times \sin AB_1M_1 = \left[\Delta AB_1M_1\right]$$

$$\therefore \left[\Delta ABM\right] < \left[\Delta AB_1M_1\right]$$

ดังนั้น

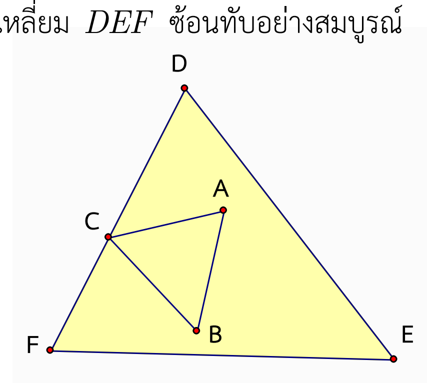
$$\begin{aligned}\left[ATMB\right] &= \left[\Delta ATM\right] + \left[\Delta ABM\right] \\ &< \left[\Delta ATM_1\right] + \left[\Delta AB_1M_1\right] = \left[ATM_1B_1\right]\end{aligned}$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้เช่นกันว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

กรณีที่ 2 $deg_T = 2.5$ จะสามารถแบ่งกรณีดังกล่าวออกเป็น 3 กรณีย่อยๆ ได้ดังนี้

กรณีย่อยที่ 2.1 $deg(\Delta ABC) = 2.5$ และ $deg(\Delta DEF) = 0$ ในกรณีดังกล่าว สามเหลี่ยม ABC ถูกสามเหลี่ยม DEF ซ้อนทับอย่างสมบูรณ์

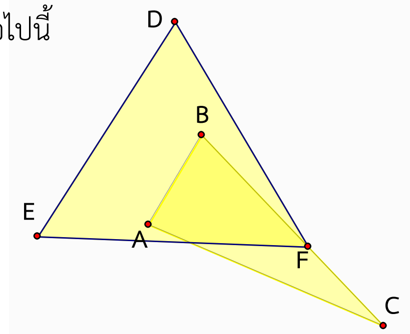


ภาพที่ 4-2.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 2 กรณีย่อยที่ 2.1

ทำให้ได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปคือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณากรณีนี้

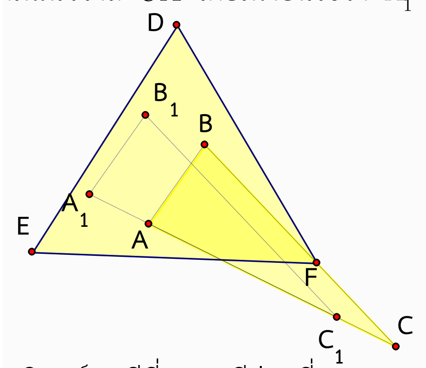
กรณีย่อยที่ 2.2 $deg(\Delta ABC) = 2$ และ $deg(\Delta DEF) = 0.5$ จะได้ว่าการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 3 รูปแบบ

2.2.1 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4-2.2.1.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 2 กรณีย่อยที่ 2.2 (2.2.1 รูปที่1)

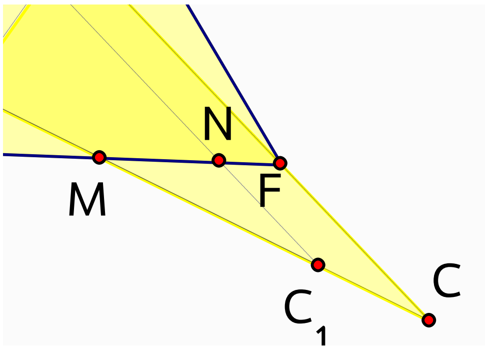
1) เลื่อนขนาน ΔABC ไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{CA}$ โดยมีเงื่อนไขว่า A_1 และ B_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF



ภาพที่ 4-2.2.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 2 กรณีย่อยที่ 2.2 (2.2.1 รูปที่2)

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น



ภาพที่ 4-2.2.1.3 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 2 กรณีย่อยที่ 2.2 (2.2.1 รูปที่3)

กำหนดให้ $\overline{AC}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด M และ $\overline{B_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด N

เนื่องจาก $\overline{NC_1}$ ขนานกับ $\overline{FC}$ และมุม $C_1\hat{M}N$ เป็นมุมร่วมกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูป ทำให้ได้ว่า ΔC_1MN คล้ายกับ ΔMFC

ดังนั้น อัตราส่วนของพื้นที่รูป ΔC_1MN ต่อรูป ΔCMF เท่ากับ $\dfrac{\mathrm{NC_1}^2}{\mathrm{FC}^2}$

และเนื่องจาก ΔABC ถูกเลื่อนขนานไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{CA}$ เกิดเป็น $\Delta A_1B_1C_1$ ดังนั้น MC_1 ต้องสั้นกว่า MC จะได้ว่า

$$MC_1 < MC$$
$$\frac{MC_1^{\;2}}{MC^2} < 1$$
$$\left[\Delta C_1MN\right] = \frac{NC_1^{\;2}}{FC^2} \times [\Delta MFC] < 1 \times [\Delta MFC]$$
$$[\Delta C_1MN] < [\Delta MFC]$$

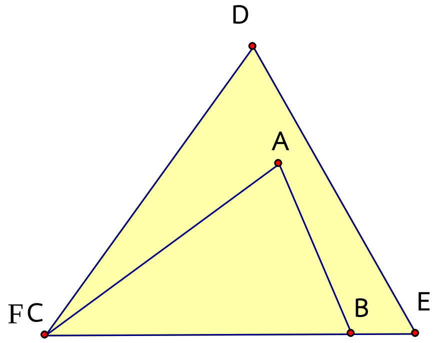
ดังนั้น

$$\left[A_1B_1MN\right] = \left[A_1B_1C_1\right] - \left[C_1MN\right] > \left[ABC\right] - \left[MFC\right] = [ABFM]$$
$$\left[A_1B_1MN\right] > [ABFM]$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

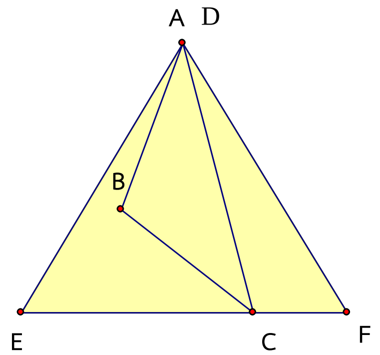
จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

2.2.2 ในกรณีดังกล่าว สามเหลี่ยม ABC ถูกสามเหลี่ยม DEF ซ้อนทับอย่างสมบูรณ์ ทำให้ได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปคือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณากรณีนี้



ภาพที่ 4-2.2.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 2 กรณีย่อยที่ 2.2 (2.2.2)

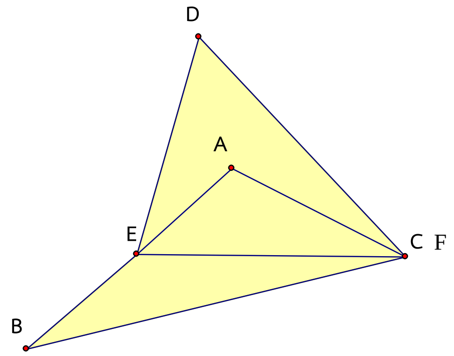
2.2.3 เช่นเดียวกันกับกรณีย่อยที่ 2.2.2 พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณาในกรณีนี้เช่นกัน



ภาพที่ 4-2.2.3รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 2 กรณีย่อยที่ 2.2 (2.2.3)

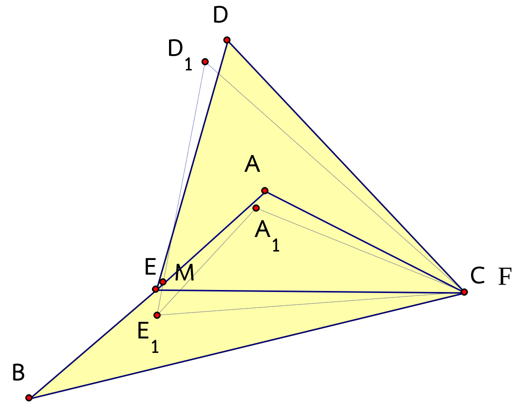
กรณีย่อยที่ 2.3 $deg(\Delta ABC)=1.5$ และ $deg(\Delta DEF)=1$ จะได้ว่าการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 4 รูปแบบ

2.3.1 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4-2.3.1.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 2 กรณีย่อยที่ 2.3 (2.3.1 รูปที่1)

1) ใช้ C เป็นจุดหมุน หมุนรูป ΔDEF ไปทางทิศทวนเข็มนาฬิกาโดยมีเงื่อนไขว่า E_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔABC ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น



ภาพที่ 4-2.3.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 2 กรณีย่อยที่ 2.3 (2.3.1 รูปที่2)

พิจารณา ΔDEF และ ΔD_1E_1F เมื่อ ΔD_1E_1F คือ ΔDEF ที่ได้ผ่านการหมุนตามวิธีการข้างต้น

กำหนดให้ $\overline{D_1E_1}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด M

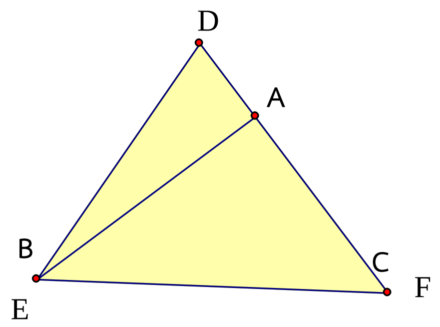
ดังนั้น $\left[AME_1C\right] = \left[A_1E_1C\right] + \left[CAME_1A_1\right] > [A_1E_1C] = [AEC]$

$$\left[AME_1C\right] > [AEC]$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

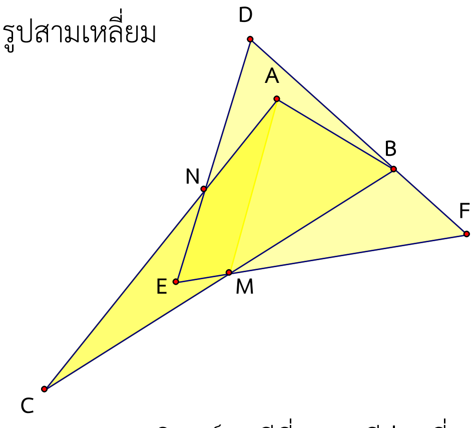
2.3.2 ในกรณีดังกล่าว สามเหลี่ยม ABC ถูกสามเหลี่ยม DEF ซ้อนทับอย่างสมบูรณ์



ภาพที่ 4-2.3.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 2 กรณีย่อยที่ 2.3 (2.3.2)

ทำให้ได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปคือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณากรณีนี้

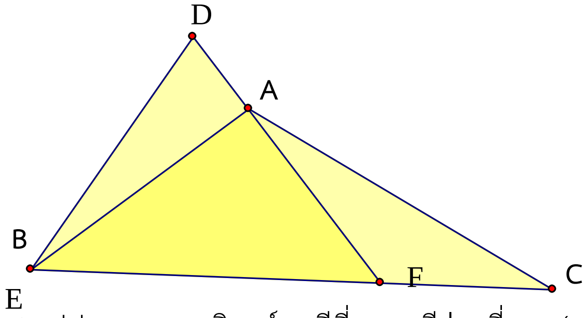
2.3.3 ในกรณีดังกล่าวยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม



ภาพที่ 4-2.3.3 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 2 กรณีย่อยที่ 2.3 (2.3.3)

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าวจะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

2.3.4 ในกรณีดังกล่าวยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม



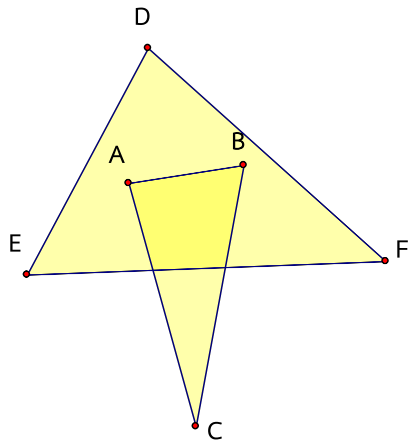
ภาพที่ 4-2.3.4 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 2 กรณีย่อยที่ 2.3 (2.3.4)

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าว จะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

กรณีที่ 3 $deg_T = 2$ จะสามารถแบ่งกรณีดังกล่าวออกเป็น 3 กรณีย่อยๆ ได้ดังนี้

กรณีย่อยที่ 3.1 $deg(\Delta ABC) = 2$ และ $deg(\Delta DEF) = 0$ จะได้ว่าการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 2 รูปแบบ

3.1.1 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้



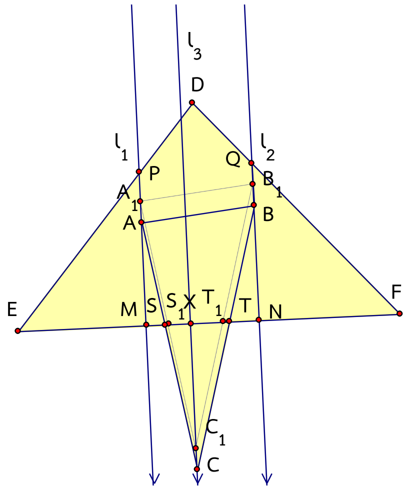
ภาพที่ 4-3.1.1.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.1 (3.1.1 รูปที่1)

1) สร้างเส้นตรง l_1 และ l_2 ผ่านจุด A และ B ตามลำดับ โดยที่เส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นตั้งฉากกับ $\overline{EF}$
2) กำหนดให้ l_1 ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด M และตัดกับ $\overline{DE}$ ที่จุด P และกำหนดให้ l_2 ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด N และตัดกับ $\overline{DF}$ ที่จุด Q
3) เลื่อนขนานรูป ΔABC ตามแนวรังสี $\overrightarrow{BQ}$ โดยมีเงื่อนไขว่า A_1 และ B_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น

กำหนดให้ AC, BC, A_1C_1, B_1C_1 ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด S, T, S_1, T_1 ตามลำดับ



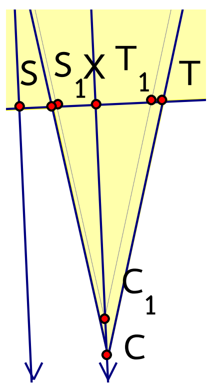
ภาพที่ 4-3.1.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.1 (3.1.1 รูปที่2)

สร้างเส้นตรง l_3 ผ่านส่วนของเส้นตรง $\overline{CC_1}$

เนื่องจาก $\overline{S_1C_1}$ ขนานกับ $\overline{SC}$ และมุม $C\hat{X}S$ เป็นมุมร่วมกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูป ทำให้ได้ว่า ΔC_1XS_1 คล้ายกับ ΔCXS

ดังนั้น อัตราส่วนของพื้นที่รูป ΔC_1XS_1 ต่อรูป ΔCXS เท่ากับ $\dfrac{XC_1^{\,2}}{XC^2}$ และเนื่องจาก ΔABC ถูกเลื่อนขนานไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{BQ}$ จะได้ว่า $\overline{XC_1}$ ต้องสั้นกว่า XC

$$XC_1 < XC$$



ภาพที่ 4-3.1.1.3 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.1 (3.1.1 รูปที่3)

$$\frac{XC_1^{\ 2}}{XC^2} < 1$$

$$\left[\Delta C_1XS_1\right] = \frac{XC_1^{\ 2}}{XC^2} \times [\Delta CXS] < 1 \times [\Delta CXS]$$

$$\left[\Delta C_1XS_1\right] < [\Delta CXS]$$

ในทำนองเดียวกัน $\left[\Delta C_1XT_1\right] < [\Delta CXT]$

นั่นคือ $\left[\Delta C_1XS_1\right] + \left[\Delta C_1XT_1\right] < \left[\Delta CXS\right] + [\Delta CXT]$

$$\left[\Delta S_1C_1T_1\right] < [\Delta SCT]$$

ดังนั้น $\left[A_1B_1T_1S_1\right] = \left[A_1B_1C_1\right] - \left[S_1C_1T_1\right]$

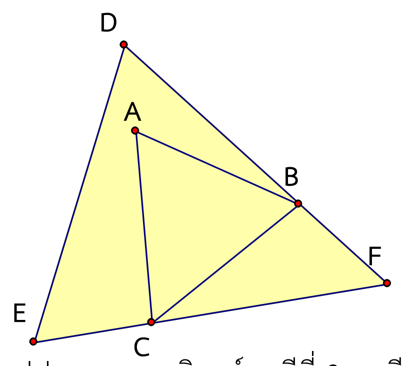
$$> \left[ABC\right] - \left[SCT\right] = [ABTS]$$

$$\left[A_1B_1T_1S_1\right] > [ABTS]$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

3.1.2 ในกรณีดังกล่าว สามเหลี่ยม ABC ถูกสามเหลี่ยม DEF ซ้อนทับอย่างสมบูรณ์



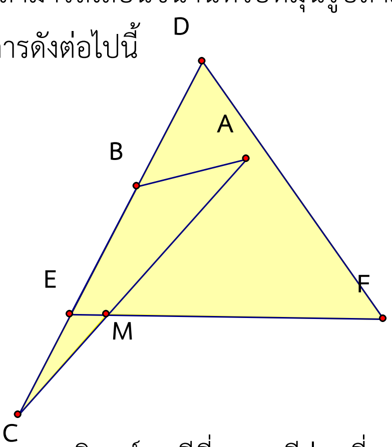
ภาพที่ 4-3.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.1 (3.1.2)

ทำให้ได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปคือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

ซึ่งเป็นพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณาในกรณีนี้

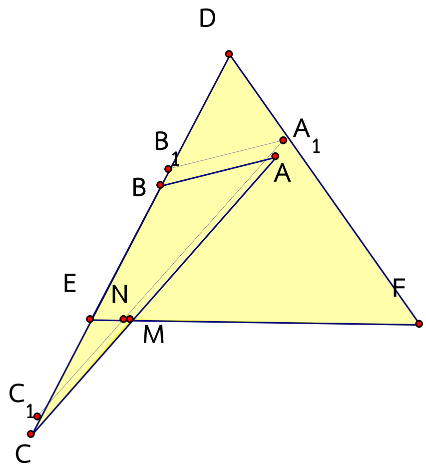
กรณีย่อยที่ 3.2 $deg(\Delta ABC) = 1.5$ และ $deg(\Delta DEF) = 0.5$ จะได้ว่าการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 5 รูปแบบ

3.2.1 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4-3.2.1.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.2 (3.2.1 รูปที่1)

1) เลื่อนขนาน ΔABC ไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{CB}$ โดยมีเงื่อนไขว่า A_1 และ B_1 จะต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF



ภาพที่ 4-3.2.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.2 (3.2.1 รูปที่2)

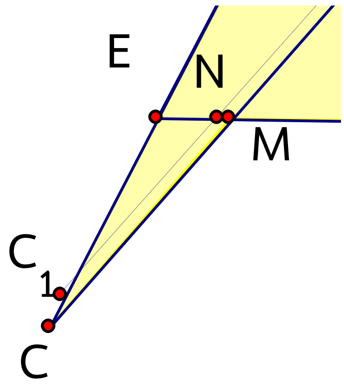
ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น

กำหนดให้ $\overline{AC}$ และ $\overline{A_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด M และ N ตามลำดับ

เนื่องจาก $\overline{NC_1}$ ขนานกับ $\overline{MC}$ และมุม $C_1\hat{E}N$ เป็นมุมร่วมกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูป ทำให้ได้ว่า ΔC_1EN คล้ายกับ ΔCEM

ดังนั้น อัตราส่วนพื้นที่ของรูป ΔC_1EN ต่อรูป ΔCEM เท่ากับ $\frac{EC_1^{\,2}}{EC^2}$



ภาพที่ 4-3.2.1.3 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.2 (3.2.1 รูปที่3)

และเนื่องจาก $\triangle ABC$ ถูกเลื่อนขนานไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{CB}$ จะได้ว่า $\overline{EC_1}$ ต้องสั้นกว่า $\overline{EC}$

$$EC_1 < EC$$

$$\frac{EC_1^{\,2}}{EC^2} < 1$$

$$\left[\Delta C_1NE\right] = \frac{EC_1^{\,2}}{EC^2} \times [\Delta CEM] < 1 \times [\Delta CEM]$$

$$\left[\Delta C_1NE\right] < [\Delta CEM]$$

ดังนั้น

$$\left[A_1B_1EN\right] = \left[A_1B_1C_1\right] - \left[C_1NE\right] > \left[ABC\right] - \left[CEM\right] = [ABEM]$$

$$\left[A_1B_1EN\right] > [ABEM]$$

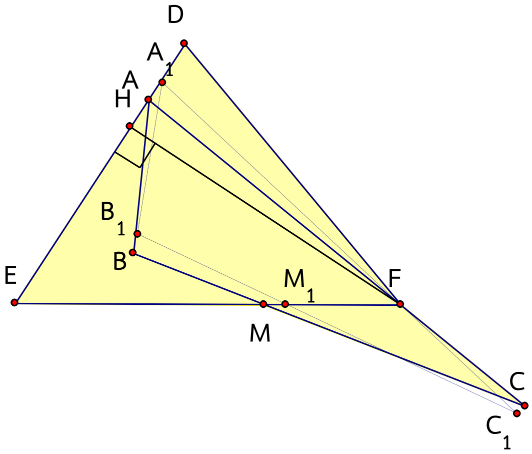
จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

3.2.2 จะพิจารณาเป็น 2 รูปแบบย่อยๆ ดังนี้

3.2.2.1 $\overline{AF}$ อยู่ด้านเดียวกันกับ D เมื่อเทียบกับเส้นความสูงที่ลากจากจุด F ของรูป ΔDEF

ในรูปแบบนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไป

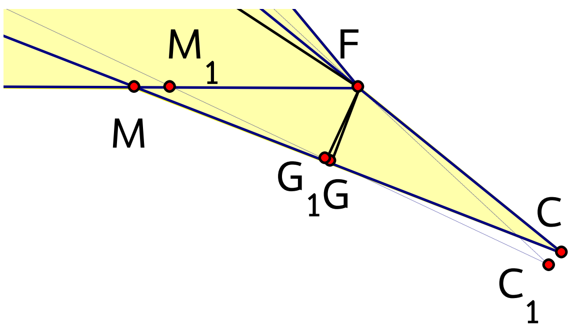


ภาพที่ 4-3.2.2.1.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.2 (3.2.2.1 รูปที่1)

1) ใช้ F เป็นจุดหมุน หมุนรูป ΔABC ไปทางทิศตามเข็มนาฬิกา โดยมีเงื่อนไขว่า A_1 และ B_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการหมุนตามวิธีการข้างต้น



ภาพที่ 4-3.2.2.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.2 (3.2.2.1 รูปที่2)

กำหนดให้ $\overline{BC}$ และ $\overline{B_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด M และ M_1 ตามลำดับ

จากจุด F ลากเส้นตั้งฉาก $\overline{MC}$ และ $\overline{M_1C_1}$ ที่จุด G และ G_1 ตามลำดับ

พิจารณา $C_1\hat{F}M_1 < C\hat{F}M$

$$180° - FC_1M - C_1\hat{F}M_1 > 180° - F\hat{C}M - C\hat{F}M$$
$$FM_1G_1 > F\hat{M}G$$
$$FG_1 \times cot\left(FM_1G_1\right) < FG \times cot\left(F\hat{M}G\right)$$
$$M_1G_1 < MG$$
$$B_1C_1 - C_1G_1 - M_1G_1 > BC - CG - MG$$
$$B_1M_1 > BM$$

พิจารณา ΔBMF และ $\Delta \mathrm{B_1M_1F}$ จะได้ว่า $FB_1M_1 = F\hat{B}M$ และ $BF = B_1F$

นั่นคือ $\frac{1}{2} \times sin\left(FB_1M_1\right) \times B_1F \times B_1M_1$

$> \frac{1}{2} \times \mathrm{sinF\hat{B}M \times BF \times BM}$

$$\left[M_1B_1F\right] > \left[MBF\right]$$

และเนื่องจาก $\left[ABF\right] = \left[A_1B_1F\right]$

ดังนั้น $\left[M_1B_1F\right] + \left[A_1B_1F\right] > \left[MBF\right] + \left[ABF\right]$

$$\left[A_1B_1M_1F\right] > \left[ABMF\right]$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

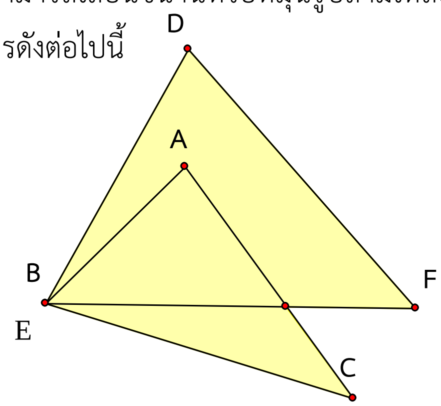
จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

3.2.2.2 $\overline{AF}$ อยู่ด้านเดียวกันกับ E เมื่อเทียบกับเส้นความสูงที่ลากจากจุด F ของรูป ΔDEF

ในกรณีดังกล่าวยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าวจะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

3.2.3 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

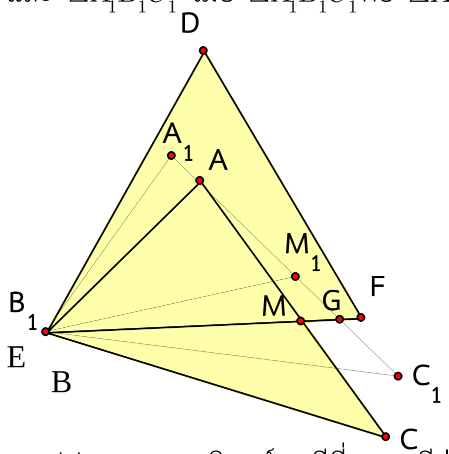


ภาพที่ 4-3.2.3.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.2 (3.2.3 รูปที่1)

1) ใช้ B เป็นจุดหมุน หมุนรูป ΔABC ไปทางทิศทวนเข็มนาฬิกาโดยมีเงื่อนไขว่า A ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการหมุนตามวิธีการข้างต้น



ภาพที่ 4-3.2.3.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.2 (3.2.3 รูปที่2)

กำหนดให้ $\overline{EF}$ ตัดกับ $\overline{AC}$ และ $\overline{A_1C_1}$ ที่จุด M และ G ตามลำดับ และกำหนดให้ M_1 คือจุด M ในรูป ΔABC ถูกหมุน

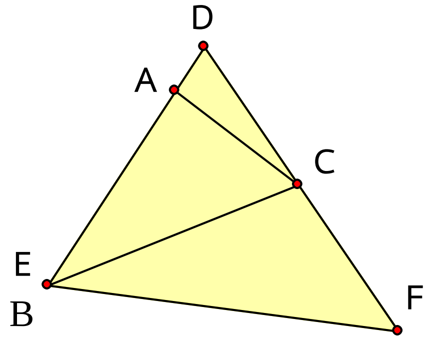
พิจารณา ΔABM และ ΔA_1B_1G จะได้ว่า

$$\left[\mathrm{A_1B_1G}\right]=\left[\mathrm{A_1B_1M_1}\right]+\left[\mathrm{M_1B_1G}\right]=\left[\mathrm{ABM}\right]+\left[\mathrm{M_1B_1G}\right]>\left[\mathrm{ABM}\right]$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้เช่นกันว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

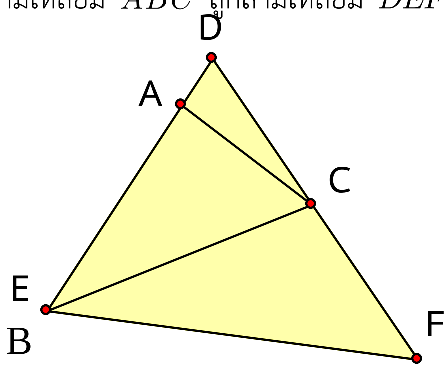
3.2.4 ในกรณีดังกล่าว สามเหลี่ยม ABC ถูกสามเหลี่ยม DEF ซ้อนทับอย่างสมบูรณ์



ภาพที่ 4-3.2.4 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.2 (3.2.4)

ทำให้ได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปคือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณาในกรณีนี้

3.2.5 ในกรณีดังกล่าว สามเหลี่ยม ABC ถูกสามเหลี่ยม DEF ซ้อนทับอย่างสมบูรณ์

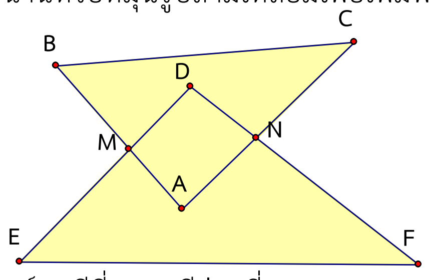


ภาพที่ 4-3.2.5 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.2 (3.2.5)

ทำให้ได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปคือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณาในกรณีนี้

กรณีย่อยที่ 3.3 $deg(\Delta ABC)=1$ และ $deg(\Delta DEF)=1$ จะได้ว่าการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 4 รูปแบบ

3.3.1 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

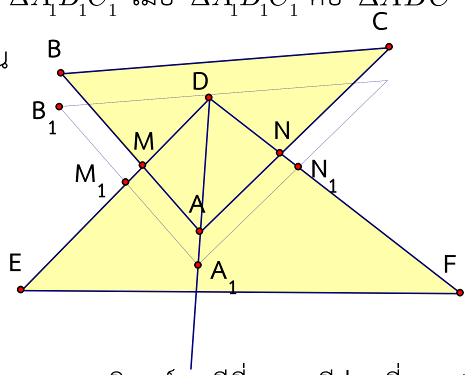


ภาพที่ 4-3.3.1.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.3 (3.3.1 รูปที่1)

1) สร้างเส้นตรง l ผ่านจุด A และจุด D
2) เลื่อนขนานรูป ΔABC ไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{DA}$ โดยมีเงื่อนไขว่า A_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น



ภาพที่ 4-3.3.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.3 (3.3.1 รูปที่2)

กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{A_1B_1}$ ตัดกับ $\overline{ED}$ ที่จุด M และ M_1 ตามลำดับ และให้ $\overline{AC}$ และ $\overline{A_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{DF}$ ที่จุด N และ N_1 ตามลำดับ

เนื่องจาก $\overline{M_1A_1}$ ขนานกับ $\overline{MA}$ และมุม $M\hat{D}A$ เป็นมุมร่วมกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูป ทำให้ได้ว่า ΔMDA คล้ายกับ ΔM_1DA_1

ดังนั้น อัตราส่วนของพื้นที่รูป ΔM_1DA_1 ต่อรูป ΔMDA เท่ากับ $\dfrac{DA_1^2}{DA^2}$

เนื่องจากรูป ΔABC ถูกเลื่อนขนานไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{DA}$ จะได้ว่า $\overline{DA_1}$ ต้องยาวกว่า $\overline{DA}$

$$DA_1 > DA$$

$$\frac{DA_1^2}{DA^2} > 1$$

$$\left[M_1DA_1\right] = \frac{DA_1^2}{DA^2} \times \left[MDA\right] > 1 \times [MDA]$$

$$\left[M_1DA_1\right] > [MDA]$$

ในทำนองเดียวกัน $\left[N_1DA_1\right] > [NDA]$

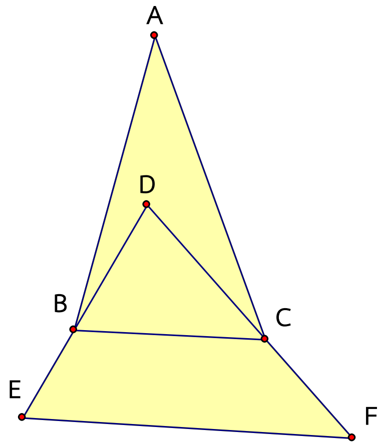
ดังนั้น $\left[M_1DA_1\right] + \left[N_1DA_1\right] > \left[MDA\right] + [NDA]$

$$\left[M_1DN_1A_1\right] > [MDNA]$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

3.3.2 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

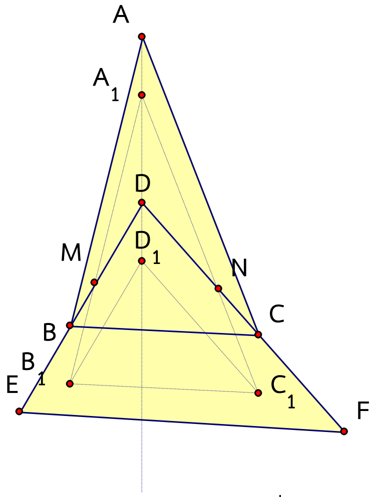


ภาพที่ 4-3.3.2.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.3 (3.3.2 รูปที่1)

1) สร้างเส้นตรง l ผ่านจุด A และจุด D

2) เลื่อนขนาน ΔABC ไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{DA}$ โดยมีเงื่อนไขว่า B_1 และ C_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF

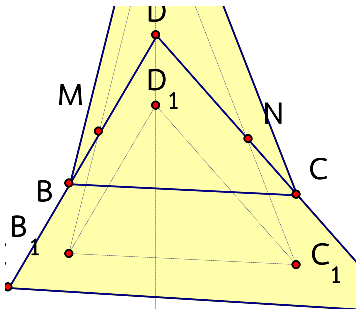
ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น



ภาพที่ 4-3.3.2.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.3 (3.3.2 รูปที่2)

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น

กำหนดให้ $\overline{A_1B_1}$ ตัดกับ $\overline{ED}$ ที่จุด M และ $\overline{A_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{DF}$ ที่จุด N และกำหนดให้ D_1 คือจุด D ในรูป ΔABC ที่ถูกเลื่อนขนาน



ภาพที่ 4-3.3.2.3 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.3 (3.3.2 รูปที่3)

พิจารณา $[\Delta D_1B_1C_1] = [\Delta DBC]$

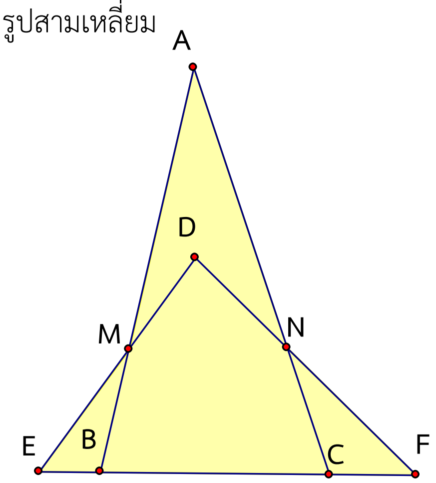
ดังนั้น $\left[MDNC_1B_1\right] =$

$[\Delta D_1B_1C_1] + [B_1D_1C_1NDM] = [\Delta DBC] + [B_1D_1C_1NDM] > [DBC]$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

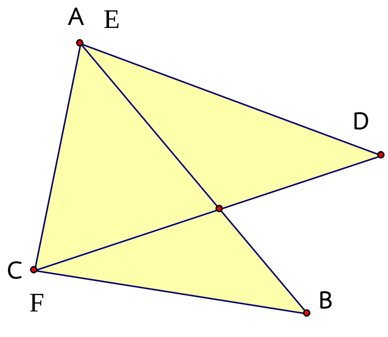
3.3.3 ในกรณีดังกล่าวยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม



ภาพที่ 4.3.3.3 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.3 (3.3.3)

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าวจะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

3.3.4 เช่นเดียวกันกับกรณีย่อยที่ 3.3 ยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม



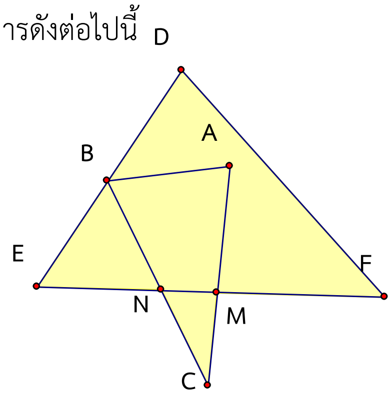
ภาพที่ 4-3.3.4 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 3 กรณีย่อยที่ 3.3 (3.3.4)

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าวจะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

กรณีที่ 4 $deg_T = 1.5$ จะสามารถแบ่งกรณีดังกล่าวออกเป็น 2 กรณีย่อยๆ ได้ดังนี้

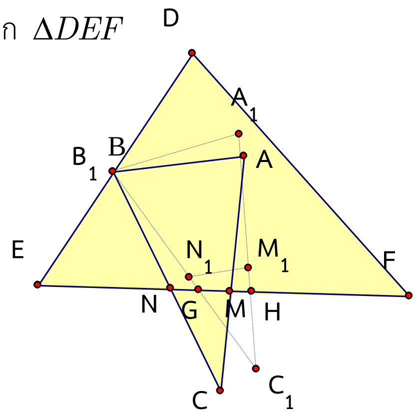
กรณีย่อยที่ 4.1 $deg(\Delta ABC) = 1.5$ และ $deg(\Delta DEF) = 0$ จะได้ว่าการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 4 รูปแบบ

4.1.1 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4-4.1.1.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.1 (4.1.1 รูปที่1)

1) ใช้ B เป็นจุดหมุน หมุนรูป ΔABC ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา โดยมีเงื่อนไขว่า A ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF



ภาพที่ 4-4.1.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.1 (4.1.1 รูปที่2)

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการหมุนตามวิธีการข้างต้น

กำหนดให้ $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด M และ N ตามลำดับ และให้ M_1, N_1 คือจุด M, N ในรูป ΔABC ที่ถูกหมุน และกำหนดให้ $\overline{A_1C_1}$ และ $\overline{B_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด H และ G ตามลำดับ

พิจารณา $[BNMA]$ และ $[B_1GHA_1]$ เนื่องจาก $[BNMA]=[B_1N_1M_1A_1]$

จะได้ว่า $\left[B_1GHA_1\right]=\left[B_1N_1M_1A_1\right]+\left[GN_1M_1H\right]$

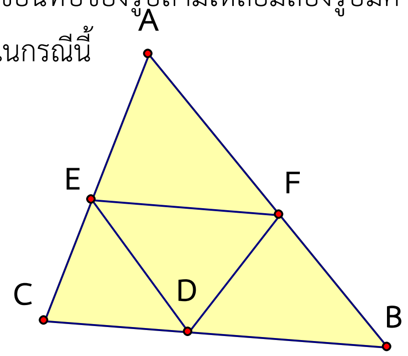
$$=[BNMA]+\left[GN_1M_1H\right]>[BNMA]$$

ดังนั้น $[B_1GHA_1]>[BNMA]$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

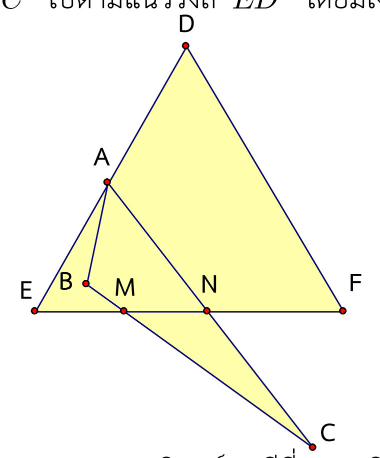
4.1.2 ในกรณีดังกล่าว พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปมีค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้แล้ว ดังนั้น จะไม่พิจารณาในกรณีนี้



ภาพที่ 4-4.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.1 (4.1.2)

4.1.3 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

1) เลื่อนขนาน ΔABC ไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{ED}$ โดยมีเงื่อนไขว่า B_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF

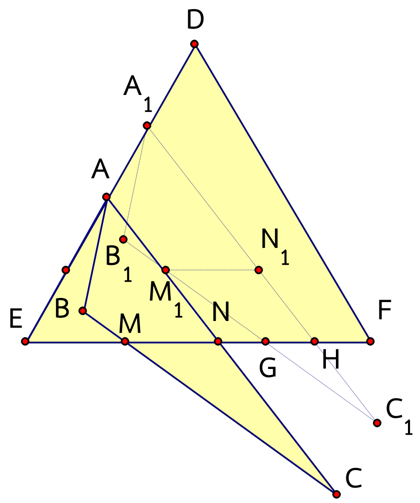


ภาพที่ 4-4.1.3.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.1 (4.1.3 รูปที่1)

โดยกำหนดให้ $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด M และจุด N ตามลำดับ

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น



ภาพที่ 4-4.1.3.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.1 (4.1.3 รูปที่2)

กำหนดให้ $\overline{B_1C_1}$ และ $\overline{A_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด H และ G ตามลำดับ และให้ M_1 และ N_1 คือจุด M และ N ในรูป ΔABC ที่ถูกเลื่อนขนาน

พิจารณา $\left[ABMN\right] = [A_1B_1M_1N_1]$

จะได้ว่า

$$\left[A_1B_1GH\right] = \left[A_1B_1M_1N_1\right] + \left[HGM_1N_1\right] = \left[ABMN\right] + \left[HGM_1N_1\right] > \left[ABMN\right]$$

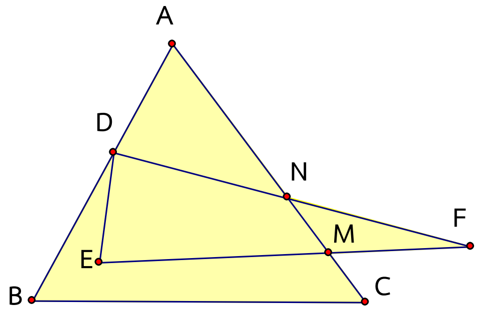
ดังนั้น $\left[A_1B_1GH\right] > \left[ABMN\right]$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

4.1.4 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

1) เลื่อนขนาน ΔDEF ไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{AB}$ โดยมีเงื่อนไขว่า E_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔABC

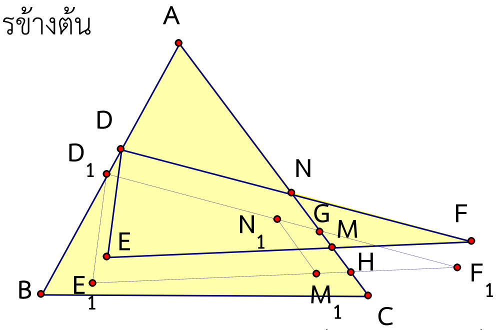


ภาพที่ 4-4.1.4.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.1 (4.1.4 รูปที่1)

โดยกำหนดให้ $\overline{AC}$ ตัดกับ $\overline{DF}$ และ $\overline{EF}$ ที่จุด N และ M ตามลำดับ

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔDEF และ $\Delta D_1E_1F_1$ เมื่อ $\Delta D_1E_1F_1$ คือ ΔDEF ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น



ภาพที่ 4-4.1.4.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.1 (4.1.4 รูปที่2)

กำหนดให้ $\overline{D_1F_1}$ และ $\overline{E_1F_1}$ ตัดกับ $\overline{AC}$ ที่จุด G และ H ตามลำดับ และให้ N_1 และ M_1 คือจุด N และ M ในรูป ΔDEF ที่ถูกเลื่อนขนาน

พิจารณา $\left[DEMN\right] = [D_1E_1M_1N_1]$

จะได้ว่า

$$\left[D_1E_1GH\right] = \left[D_1E_1M_1N_1\right] + \left[HGM_1N_1\right] = \left[DEMN\right] + \left[HGM_1N_1\right] > \left[DEMN\right]$$

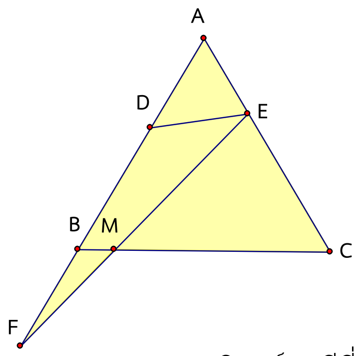
ดังนั้น $\left[D_1E_1GH\right] > \left[DEMN\right]$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

กรณีย่อยที่ 4.2 $deg(\Delta ABC) = 1.0$ และ $deg(\Delta DEF) = 0.5$ จะได้ว่าการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 5 รูปแบบ

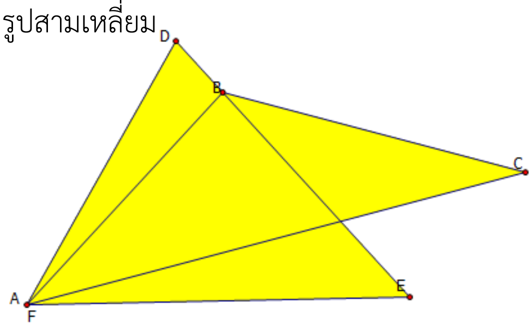
4.2.1 ในกรณีดังกล่าวยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม



ภาพที่ 4-4.2.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.2 (4.2.1)

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าวจะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

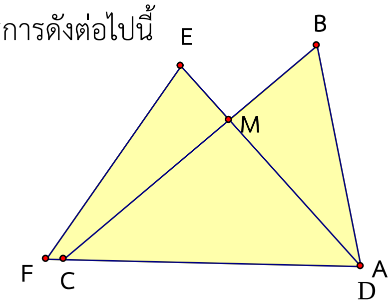
4.2.2 ในกรณีดังกล่าวยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม



ภาพที่ 4-4.2.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.2 (4.2.2)

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าวจะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

4.2.3 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

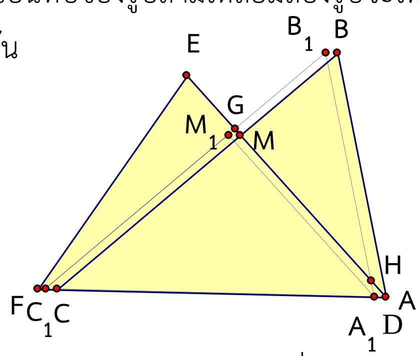


ภาพที่ 4-4.2.3.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.2 (4.2.3 รูปที่1)

1) เลื่อนขนาน ΔABC ไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{DF}$ โดยมีเงื่อนไขว่า C_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF

โดยกำหนดให้ $\overline{BC}$ ตัดกับ $\overline{ED}$ ที่จุด M

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น



ภาพที่ 4-4.2.3.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.2 (4.2.3 รูปที่2)

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น

กำหนดให้ B_1C_1 และ A_1B_1 ตัดกับ $\overline{ED}$ ที่จุด G และ H ตามลำดับ และให้ M_1 คือจุด M ในรูป ΔABC ที่ถูกเลื่อนขนาน

พิจารณา $\left[CMA\right] = [C_1M_1A_1]$ จะได้ว่า

$$\left[C_1GHA_1\right] = \left[C_1M_1A_1\right] + \left[HGM_1A_1\right] = \left[CMA\right] + \left[HGM_1A_1\right]$$

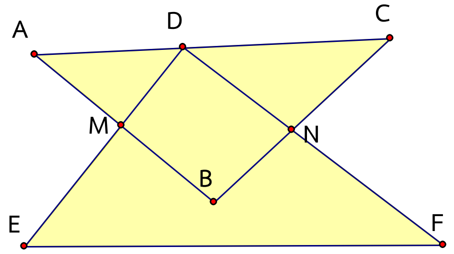
$$> \left[CMA\right]$$

ดังนั้น $\left[C_1GHA_1\right] > \left[CMA\right]$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

4.2.4 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

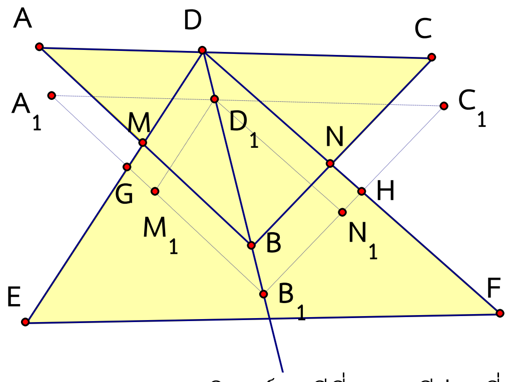


ภาพที่ 4-4.2.4.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.2 (4.2.4 รูปที่1)

1) เลื่อนขนาน ΔABC ไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{DB}$ โดยมีเงื่อนไขว่า B_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF

โดยกำหนดให้ $\overline{AB}$ ตัดกับ $\overline{ED}$ ที่จุด M และ $\overline{BC}$ ตัดกับ $\overline{DF}$ ที่จุด N

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น



ภาพที่ 4-4.2.4.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.2 (4.2.4 รูปที่2)

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น

กำหนดให้ $\overline{A_1B_1}$ ตัดกับ $\overline{ED}$ ที่จุด G และ $\overline{B_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{DF}$ ที่จุด H และให้ M_1 และ N_1 คือจุด M และ N ในรูป ΔABC ที่ถูกเลื่อนขนาน

พิจารณา $\left[DMBN\right] = [D_1M_1B_1N_1]$

จะได้ว่า $\left[DGB_1H\right] = \left[D_1M_1B_1N_1\right] + \left[D_1N_1HDG\right]$

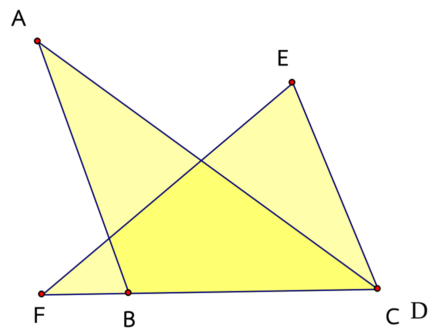
$= \left[DMBN\right] + \left[D_1N_1HDG\right] > \left[DMBN\right]$

ดังนั้น $\left[DGB_1H\right] > \left[DMBN\right]$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

4.2.5 ในกรณีดังกล่าวยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม



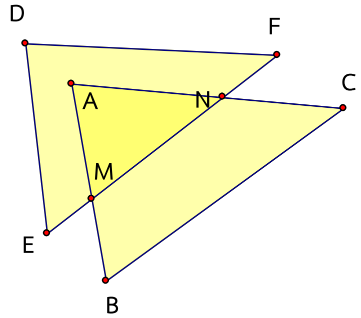
ภาพที่ 4-4.2.5 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 4 กรณีย่อยที่ 4.2 (4.2.5)

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าวจะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

กรณีที่ 5 $deg_T = 1$ จะสามารถแบ่งกรณีดังกล่าวออกเป็น 2 กรณีย่อยๆ ได้ดังนี้

กรณีย่อยที่ 5.1 $deg(\Delta ABC) = 1$ และ $deg(\Delta DEF) = 0$ จะได้ว่าการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 2 รูปแบบ

5.1.1 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

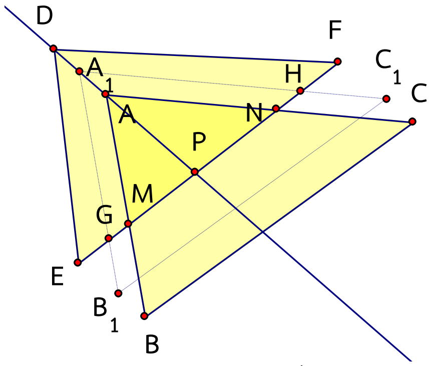


ภาพที่ 4-5.1.1.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 5 กรณีย่อยที่ 5.1 (5.1.1 รูปที่1)

1) เลื่อนขนาน ΔABC ไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{AD}$ โดยมีเงื่อนไขว่า A ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF และให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด M และ N ตามลำดับ

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น



ภาพที่ 4-5.1.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 5 กรณีย่อยที่ 5.1 (5.1.1 รูปที่2)

กำหนดให้ $\overline{A_1B_1}$ และ $\overline{A_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด G และ H ตามลำดับ

เนื่องจาก $\overline{GA_1}$ ขนานกับ $\overline{AM}$ และมุม $M\hat{P}A$ เป็นมุมร่วมกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูป ทำให้ได้ว่า ΔMPA คล้ายกับ ΔGPA_1

ดังนั้น อัตราส่วนของพื้นที่รูป ΔGPA_1 ต่อรูป ΔMPA เท่ากับ $\dfrac{PA_1^2}{PA^2}$

เนื่องจากรูป ΔABC ถูกเลื่อนขนานไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{AD}$ จะได้ว่า $\overline{PA_1}$ ต้องยาวกว่า $\overline{PA}$

$$PA_1 > PA$$

$$\frac{PA_1^2}{PA^2} > 1$$

$$\left[\Delta GPA_1\right] = \frac{PA_1^2}{PA^2} \times \left[\Delta \mathrm{MPA}\right] > 1 \times [\Delta \mathrm{MPA}]$$

$$\left[\Delta GPA_1\right] > [\Delta \mathrm{MPA}]$$

ในทำนองเดียวกัน $\left[\Delta HPA_1\right] > [\Delta \mathrm{NPA}]$

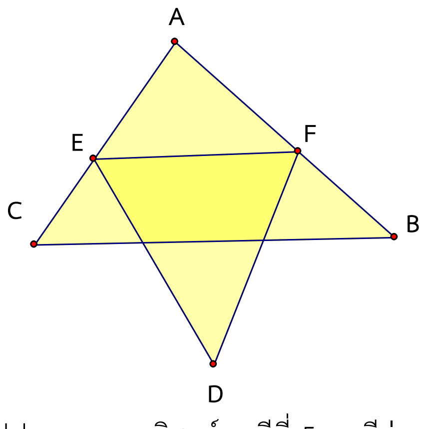
ดังนั้น $\left[\Delta GPA_1\right] + \left[\Delta HPA_1\right] > [\Delta \mathrm{MPA}] + [\Delta \mathrm{NPA}]$

$$\left[A_1 GH\right] > [\mathrm{AMN}]$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

5.1.2 ในกรณีดังกล่าวยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม

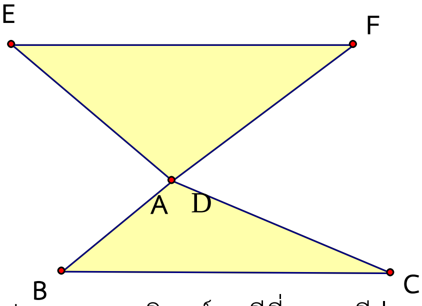


ภาพที่ 4-5.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 5 กรณีย่อยที่ 5.1 (5.1.2)

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าวจะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

กรณีย่อยที่ 5.2 $deg(\Delta ABC) = 0.5$ และ $deg(\Delta DEF) = 0.5$ จะได้ว่าการจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 2 รูปแบบ

5.2.1 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

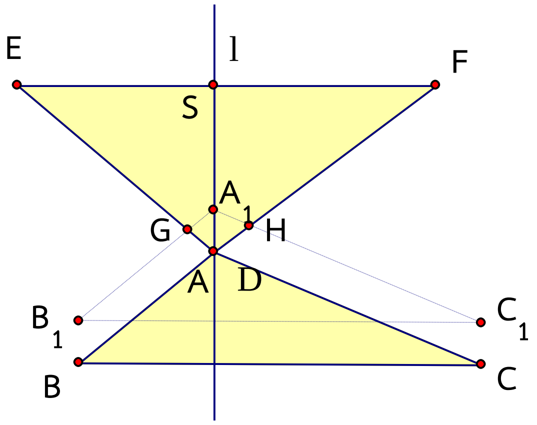


ภาพที่ 4-5.2.1.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 5 กรณีย่อยที่ 5.2 (5.2.1 รูปที่1)

1) สร้างเส้นตรง l ผ่านจุด A ตั้งฉากกับ $\overline{EF}$ ที่จุด S

2) เลื่อนขนาน ΔABC ไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{DS}$ โดยมีเงื่อนไขว่า A_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น



ภาพที่ 4-5.2.1.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 5 กรณีย่อยที่ 5.2 (5.2.1 รูปที่2)

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น

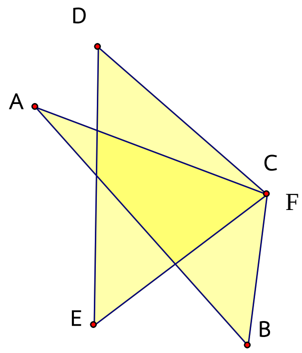
กำหนดให้ $\overline{A_1B_1}$ ตัดกับ $\overline{ED}$ ที่จุด G และ $\overline{A_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{FD}$ ที่จุด H

$$\text{พิจารณา } \left[DGA_1H\right] > 0$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

5.2.2 ในกรณีดังกล่าวยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม

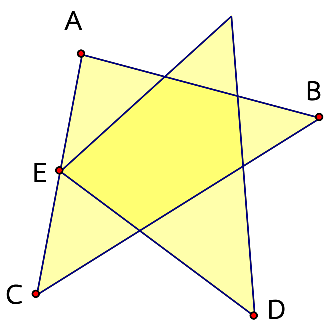


ภาพที่ 4-5.2.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 5 กรณีย่อยที่ 5.2 (5.2.2)

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าวจะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

กรณีที่ 6 $deg_T = 0.5$ จะได้ว่า $deg(\Delta ABC) = 0.5$ และ $deg(\Delta DEF) = 0$ เท่านั้น การจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 3 รูปแบบ

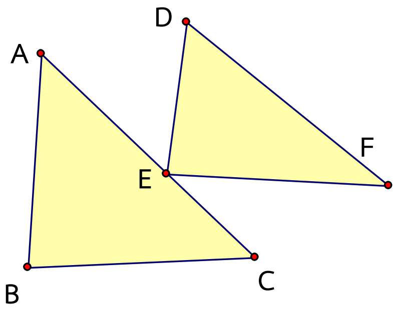
กรณีย่อยที่ 6.1 ในกรณีดังกล่าวยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม



ภาพที่ 4-6.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 6 กรณีย่อยที่ 6.1

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าวจะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

กรณีย่อยที่ 6.2 ในกรณีนี้ เห็นได้ชัดว่า สามารถแปลงรูปสามเหลี่ยมหนึ่งในสองรูปเพื่อให้สามเหลี่ยมทั้งสองรูปทับกัน ดังนั้น พื้นที่ซ้อนทับหลังจากการแปลงรูปสามเหลี่ยมจะมากกว่าพื้นที่ซ้อนทับก่อนหน้าการแปลงรูปซึ่งเท่ากับศูนย์

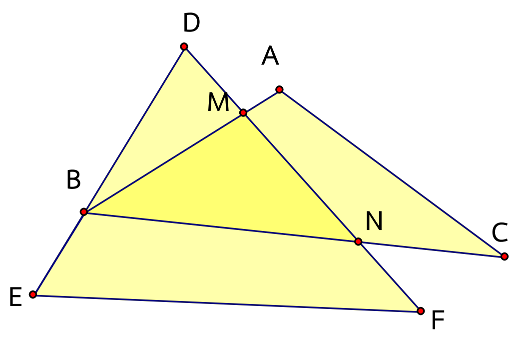


ภาพที่ 4-6.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 6 กรณีย่อยที่ 6.2

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

กรณีย่อยที่ 6.3 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

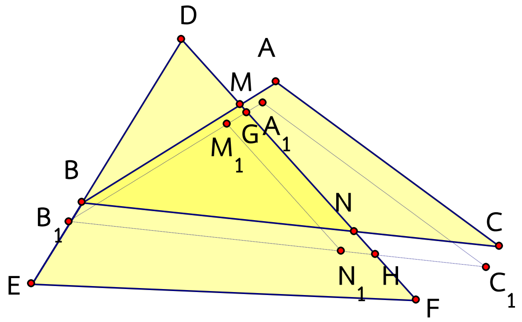


ภาพที่ 4-6.3.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 6 กรณีย่อยที่ 6.3 (รูปที่ 1)

1) เลื่อนขนาน ΔABC ไปตามแนวรังสี $\overrightarrow{DE}$ โดยมีเงื่อนไขว่า B_1 และ N_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ตัดกับ $\overline{DF}$ ที่จุด M และ N ตามลำดับ

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น



ภาพที่ 4-6.3.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 6 กรณีย่อยที่ 6.3 (รูปที่ 2)

กำหนดให้ $\overline{A_1B_1}$ และ $\overline{B_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{DF}$ ที่จุด G และ H ตามลำดับ

$$\text{พิจารณา } \left[BMN\right] = [B_1M_1N_1]$$

$$\text{ดังนั้น } \left[B_1GH\right] = \left[B_1M_1N_1\right] + \left[HGM_1N_1\right]$$

$$= \left[BMN\right] + \left[HGM_1N_1\right] > \left[BMN\right]$$

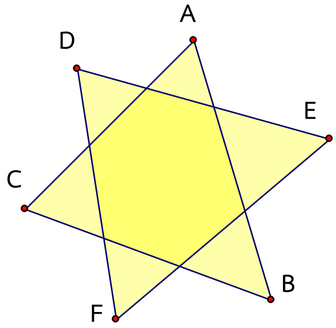
$$\left[B_1GH\right] > \left[BMN\right]$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

กรณีที่ 7 $deg_T = 0$ จะได้ว่า $deg(\Delta ABC) = 0$ และ $deg(\Delta DEF) = 0$ เท่านั้น การจัดเรียงของรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้สามารถเกิดขึ้นได้ 3 รูปแบบ

กรณีย่อยที่ 7.1 ในกรณีดังกล่าวยังไม่สามารถหาวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยม

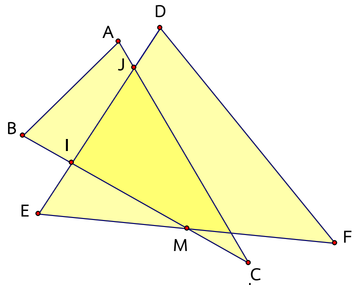


ภาพที่ 4-7.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 7 กรณีย่อยที่ 7.1

ดังนั้น จึงมีความเป็นไปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีการจัดวางในลักษณะดังกล่าวจะมีพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

กรณีย่อยที่ 7.2 ในกรณีนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า สามารถเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับโดยใช้ขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

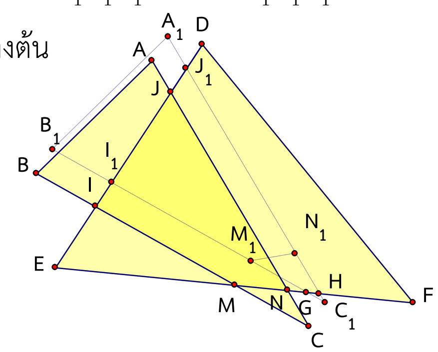
1) เลื่อนขนาน ΔABC ไปตามแนวรังสี $\overline{ED}$ โดยมีเงื่อนไขว่า J_1 ต้องไม่อยู่ภายนอก ΔDEF โดยกำหนดให้ $\overline{BC}$ ตัดกับ $\overline{ED}$ และ $\overline{EF}$ ที่จุด I และ M ตามลำดับ และ $\overline{AC}$ ตัดกับ $\overline{ED}$ และ $\overline{EF}$ ที่จุด J และ N ตามลำดับ



ภาพที่ 4-7.2.1 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 7 กรณีย่อยที่ 7.2 (รูปที่1)

ต่อไปจะแสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเพิ่มขึ้นภายหลังจากการแปลงตามขั้นตอนข้างต้น

พิจารณา ΔABC และ $\Delta A_1B_1C_1$ เมื่อ $\Delta A_1B_1C_1$ คือ ΔABC ที่ได้ผ่านการเลื่อนขนานตามวิธีการข้างต้น



ภาพที่ 4-7.2.2 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 7 กรณีย่อยที่ 7.2 (รูปที่2)

กำหนดให้ $\overline{B_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{ED}$ และ $\overline{EF}$ ที่จุด I_1 และ G ตามลำดับ และให้ $\overline{A_1C_1}$ ตัดกับ $\overline{ED}$ และ $\overline{EF}$ ที่จุด J_1 และ H ตามลำดับ

$$\text{พิจารณา } \left[JIMN\right] = [J_1I_1M_1N_1]$$

ดังนั้น

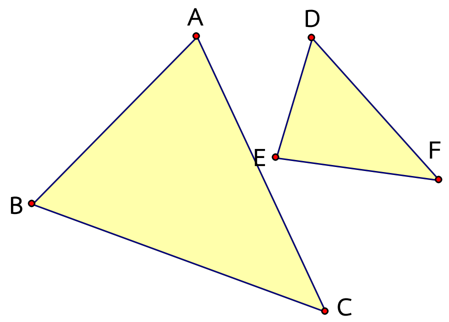
$$\left[I_1J_1\mathrm{GH}\right] = \left[J_1I_1M_1\mathrm{N}_1\right] + \left[\mathrm{HG}M_1N_1\right] = \left[\mathrm{JIMN}\right] + \left[\mathrm{HG}M_1N_1\right]$$

$$\therefore \left[I_1J_1\mathrm{GH}\right] > \left[\mathrm{JIMN}\right]$$

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว

กรณีย่อยที่ 7.3 ในกรณีนี้ เห็นได้ชัดว่า สามารถแปลงรูปสามเหลี่ยมหนึ่งในสองรูปเพื่อให้สามเหลี่ยมทั้งสองรูปทับกัน



ภาพที่ 4-7.3 รูปประกอบการพิสูจน์กรณีที่ 7 กรณีย่อยที่ 7.3

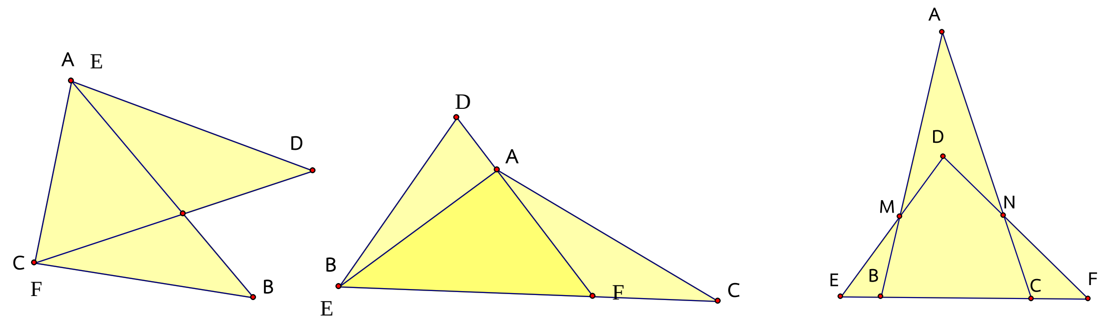
ดังนั้น พื้นที่ซ้อนทับหลังจากการแปลงรูปสามเหลี่ยมจะมากกว่าพื้นที่ซ้อนทับก่อนหน้าการแปลงรูปซึ่งเท่ากับศูนย์

จึงได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับของรูปสามเหลี่ยมสองรูปหลังจากการแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า สามารถหาวิธีการในการแปลงรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับในกรณีนี้ได้

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว □

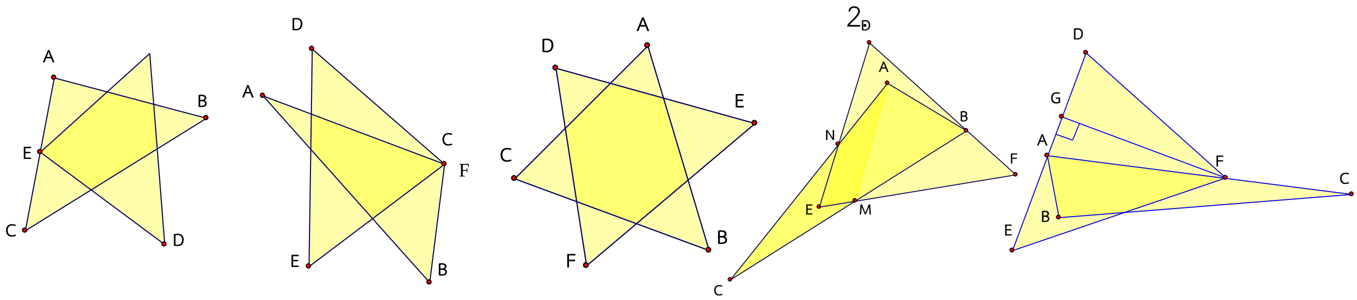
จากการแบ่งกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการจัดเรียงรูปสามเหลี่ยมสองรูปให้ซ้อนทับกัน พบว่า กรณีที่ยังไม่สามารถหาขั้นตอนวิธีการในการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับ จะแบ่งออกได้เป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

1. สามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีด้านหนึ่งด้านที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



ภาพที่ 4-1-1 รูปแสดงกรณีที่สามารถให้พื้นที่ทับซ้อนที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ รูปที่1

2. สามเหลี่ยมสองรูปเรียงตัวกันเป็นรูปดาว (Star-shaped) และกรณีอื่นๆ บางส่วน



ภาพที่ 4-1-2 รูปแสดงกรณีที่สามารถให้พื้นที่ทับซ้อนที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ รูปที่2

ซึ่งสำหรับนิยามของ star-shaped คือการที่สามเหลี่ยมสองรูปเรียงตัวกันโดยที่ไม่มีด้านใดซ้อนทับกัน และดีกรีของจุดยอดสามเหลี่ยมทั้ง 6 จุดจะมีค่าเท่ากับ 0 หรือ 0.5 เท่านั้น แต่ในสามเหลี่ยมเดียวกันจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปนั้นจะต้องไม่เป็น 0.5 พร้อมกัน

ซึ่งสำหรับในกรณีที่ 2 ยังไม่สามารถสรุปได้ว่าการจัดเรียงของสามเหลี่ยมสองรูปจะต้องเป็นไปในลักษณะใด จึงจะให้พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด แต่ในกรณีแรก จะมีขั้นตอนวิธีการในการหาตำแหน่งการจัดวางของรูปสามเหลี่ยม เพื่อให้ได้พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด ซึ่งจะแสดงดังต่อไปนี้

4.2 การหาตำแหน่งของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านร่วมกัน 1 ด้าน ภายใต้การเลื่อนขนานที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

ส่วนนี้จะพิจารณาในกรณีที่รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านร่วมกันอย่างน้อย 1 ด้าน นั่นคือจะพิจารณาเฉพาะการเลื่อนขนานไปกับด้านร่วมเท่านั้น จากนั้นจะสามารถใช้กระบวนการเดียวกันพิจารณาคู่ด้านร่วมอื่นว่าคู่ใดให้พื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุด

บทตั้ง 4.2.1

สามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$ ที่คล้ายกันจะสามารถซ้อนทับกันได้สนิท

บทพิสูจน์ ให้สามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$ เป็นสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน โดยไม่เสียนัยทั่วไปกำหนดให้ $\left[\mathcal{B}\right] \le \left[\mathcal{A}\right]$

ให้สามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$ คือ MNO และ PQR โดยที่

$$M\hat{N}O = P\hat{Q}R$$
$$N\hat{O}M = Q\hat{R}P$$

และ $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$

และกำหนดให้ $MN = kPQ$ จาก $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ จะได้ว่า $NO = kQR$ และ $OM = kRP$

กรณีที่ $\left[\mathcal{B}\right] = \left[\mathcal{A}\right]$ จะพิสูจน์ว่า $\mathcal{A}$ สามารถซ้อนทับ $\mathcal{B}$ ได้สนิท โดยจะแสดงว่า $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

ขั้นแรกจะแสดงว่า $MN = PQ$

จากกฎของไซน์จะได้ว่า $\left[\mathcal{A}\right] = \frac{1}{2}\left(MN\right)\left(NO\right)\sin M\hat{N}O = \frac{1}{2}k^2\left(PQ\right)\left(QR\right)\sin P\hat{Q}R$

และ $\left[\mathcal{B}\right] = \frac{1}{2}\left(PQ\right)\left(QR\right)\sin P\hat{Q}R$ แต่ $\left[\mathcal{B}\right] = \left[\mathcal{A}\right]$ ดังนั้น $k = 1$ นั่นคือ $MN = PQ$

และจะได้ว่า $NO = QR$ และ $OM = RP$

ดังนั้นจะสามารถวาง M บน P, N บน Q และ O บน R พร้อมกันได้ นั่นคือ $\mathcal{A}$ สามารถซ้อนทับ $\mathcal{B}$ ได้สนิท

กรณีที่ $\left[\mathcal{B}\right] < \left[\mathcal{A}\right]$ จะพิสูจน์ว่า $\mathcal{A}$ สามารถซ้อนทับ $\mathcal{B}$ ได้สนิท

ขั้นแรกจะแสดงว่า $MN > PQ$

จากกฎของไซน์จะได้ว่า $\left[\mathcal{A}\right] = \frac{1}{2}\left(MN\right)\left(NO\right)\sin M\hat{N}O = \frac{1}{2}k^2\left(PQ\right)\left(QR\right)\sin P\hat{Q}R$

และ $\left[\mathcal{B}\right] = \frac{1}{2}\left(PQ\right)\left(QR\right)\sin P\hat{Q}R$ แต่ $\left[\mathcal{B}\right] < \left[\mathcal{A}\right]$ ดังนั้น $k > 1$ นั่นคือ $MN > PQ$

และจะได้ว่า $NO > QR$ และ $OM > RP$

ดังนั้นจะมีจุด X บน $\overline{MN}$ ที่ทำให้ $MX = PQ$ จาก X ลากเส้นขนาน $\overline{QR}$ ตัด $\overline{RP}$ ที่ Y

ด้วยวิธีการเดียวกับกรณีแรกจะได้ว่าสามเหลี่ยม $MXY \sim PQR$ ดังนั้น MXY สามารถซ้อนทับ $\mathcal{B}$ ได้พอดี แต่เนื่องจาก MXY อยู่ในสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ ดังนั้น $\mathcal{A}$ สามารถซ้อนทับ $\mathcal{B}$ ได้สนิท

จากบทพิสูจน์ข้างต้นยังสรุปได้ด้วยว่ามีตำแหน่งที่สามเหลี่ยมที่คล้ายกันทั้งสองซ้อนทับกันได้พอดีและมีด้านร่วมกัน 2 ด้าน และมุมร่วมกัน 1 มุม

ต่อไปจะกล่าวถึงบทตั้งที่จะใช้ในการพิสูจน์กระบวนการหาตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับมากที่สุด

บทตั้ง 4.2.2

ให้รูป MNO และ PQR แทนด้วย $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$ ตามลำดับเป็นสามเหลี่ยมใดๆที่มีด้านร่วมกัน 1 ด้าน โดยที่ด้าน $\overline{MN}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$ และ M อยู่ใกล้ P มากกว่า N จะได้ว่ามีสามเหลี่ยม $M'N'O' \sim MNO$ เรียกว่าสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ ซึ่งทำให้สามเหลี่ยม $\mathcal{B}$ สามารถซ้อนทับสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ ได้พอดี และจะเรียกสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ ที่มีพื้นที่มากที่สุดว่าสามเหลี่ยม $\mathcal{A}'$

บทพิสูจน์ ให้รูป MNO และ PQR แทนด้วย $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$ ตามลำดับเป็นสามเหลี่ยมใดๆโดยที่ด้าน $\overline{MN}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$ *และ* M *อยู่ใกล้* P *มากกว่า* N พิจารณากรณีตามมุมดังนี้

กรณีที่ 1 $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M \le R\hat{Q}P$

กรณีที่ 2 $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M > R\hat{Q}P$

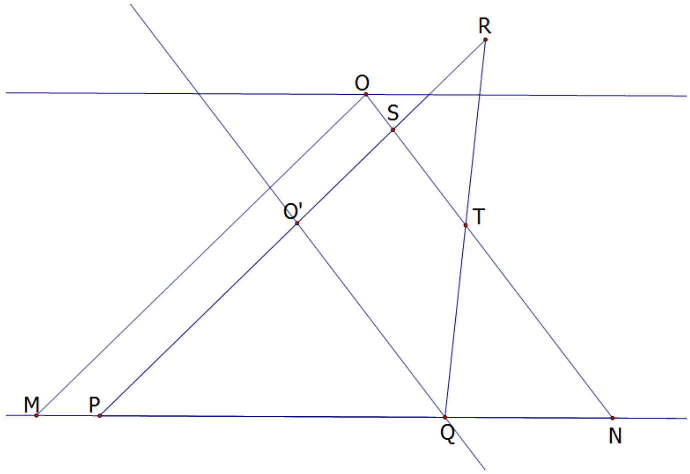
กรณีที่ 3 $O\hat{M}N < R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M \le R\hat{Q}P$

กรณีที่ 4 $O\hat{M}N < R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M > R\hat{Q}P$

กรณีที่ 5 $O\hat{M}N > R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M \le R\hat{Q}P$

กรณีที่ 6 $O\hat{M}N > R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M > R\hat{Q}P$

กรณีที่ 1 $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M \le R\hat{Q}P$ สังเกตว่าถ้า $O\hat{N}M = R\hat{Q}P$ แล้วสามเหลี่ยมทั้งสองจะคล้ายกัน จากบทตั้ง 4.2.1 สามเหลี่ยมสองรูปใดๆที่คล้ายกันจะซ้อนทับกันได้สนิทเสมอ จึงชัดเจนว่าสามเหลี่ยม $\mathcal{A}'$ ที่เป็นรูปที่ใหญ่ที่สุดตามเงื่อนไขก็คือสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการกับ $\mathcal{B}$ นั่นเอง ดังนั้นต่อไปจะพิจารณาเมื่อ $O\hat{N}M < R\hat{Q}P$

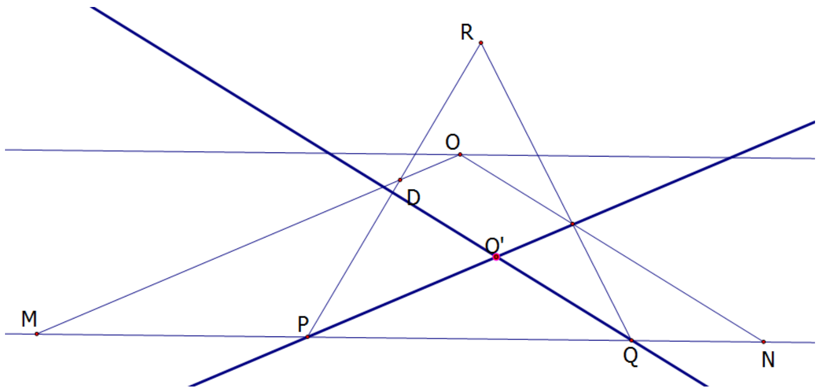


ภาพที่ 4.2.1 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้ง 4.2.2 กรณีที่ 1

สร้างเส้นขนาน $\overline{NO}$ ผ่าน Q ตัด $\overline{RP}$ ที่ O' สังเกตว่า $PO'Q \sim MON$ และอยู่ภายใน PQR จากบทตั้ง 4.2.1 จะได้ว่าสามเหลี่ยมที่คล้ายกับ MON และเล็กกว่า $PO'Q$ จะสามารถถูก $PO'Q$ ปิดทับได้สนิท นั่นคือจะอยู่ใน PQR ด้วย ต่อไปจะแสดงว่า $PO'Q$ เป็นรูปที่ใหญ่ที่สุดที่สอดคล้องนั่นคือเป็นสามเหลี่ยม $\mathcal{A}'$ นั่นเอง ให้สามเหลี่ยม $XYZ \sim PO'Q$ เป็นสามเหลี่ยมที่ใหญ่กว่า $PO'Q$ จากที่ $XYZ \sim PO'Q$ จะได้ว่า $XZ > PQ$ จึงเป็นไปไม่ได้ที่ PQR จะซ้อนทับ XYZ ได้สนิท จึงได้ว่า $PO'Q$ เป็นสามเหลี่ยมที่ใหญ่ที่สุดที่สอดคล้อง

กรณีที่ 2 $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M > R\hat{Q}P$ สังเกตว่าสามารถพิจารณารูปสามเหลี่ยมทั้งสองสลับกันกับกรณีที่ 1 ได้

กรณีที่ 3 $O\hat{M}N < R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M \leq R\hat{Q}P$ ถ้า $O\hat{N}M = R\hat{Q}P$ สังเกตว่าสามารถพิจารณาได้คล้ายๆกับกรณีที่ 1 ดังนั้นจะพิจารณาเมื่อ $O\hat{N}M < R\hat{Q}P$



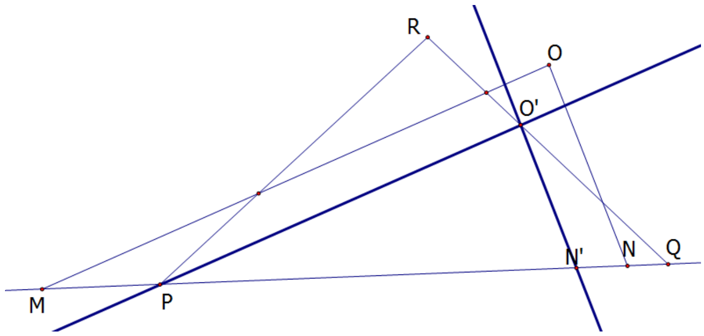
ภาพที่ 4.2.2 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้ง 4.2.2 กรณีที่ 3

สร้างเส้นขนาน $\overline{NO}$ ผ่าน Q และเส้นขนาน $\overline{MO}$ ผ่าน P ตัดกันที่ O' สังเกตว่า $PO'Q \sim MON$ และอยู่ภายใน PQR จากบทตั้ง 4.2.1 จะได้ว่าสามเหลี่ยมที่คล้าย

กับ MON และเล็กกว่า $PO'Q$ จะสามารถถูก $PO'Q$ ปิดทับได้สนิท นั่นคือจะอยู่ใน PQR ด้วย ต่อไปจะแสดงว่า $PO'Q$ เป็นรูปที่ใหญ่ที่สุดที่สอดคล้องนั่นคือเป็นสามเหลี่ยม $\mathcal{A}'$ นั่นเอง

ให้สามเหลี่ยม $XYZ \sim PO'Q$ เป็นสามเหลี่ยมที่ใหญ่กว่า $PO'Q$ จากที่ $XYZ \sim PO'Q$ จะได้ว่า $XZ > PQ$ จึงเป็นไปไม่ได้ที่ PQR จะซ้อนทับ XYZ ได้สนิท จึงได้ว่า $PO'Q$ เป็นสามเหลี่ยมที่ใหญ่ที่สุดที่สอดคล้อง

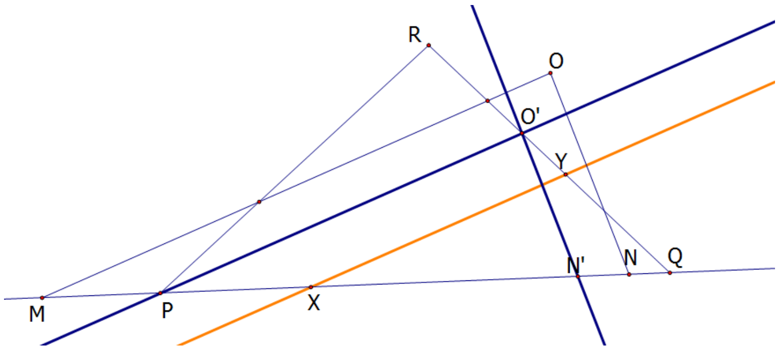
กรณีที่ 4 $O\hat{M}N < R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M > R\hat{Q}P$



ภาพที่ 4.2.3 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้ง 4.2.2 กรณีที่ 4 รูปที่ 1

สร้างเส้นขนาน $\overline{MO}$ ผ่าน P ตัด $\overline{RQ}$ ที่ O' จาก O' สร้างเส้นขนาน $\overline{NO}$ ตัด $\overline{PQ}$ ที่ N' สังเกตว่า $PO'N' \sim MON$ และอยู่ภายใน PQR จากบทตั้ง 4.2.1 จะได้ว่าสามเหลี่ยมที่คล้ายกับ MON และเล็กกว่า $PO'N'$ จะสามารถถูก $PO'N'$ ปิดทับได้สนิท นั่นคือจะอยู่ใน PQR ด้วย ต่อไปจะแสดงว่า $PO'Q$ เป็นรูปที่ใหญ่ที่สุดที่สอดคล้องนั่นคือเป็นสามเหลี่ยม $\mathcal{A}'$ นั่นเอง

จะแสดงว่าส่วนของเส้นตรงที่ขนาน $\overline{MO}$ และอยู่ใน PQR จะยาวสุดเมื่อผ่านจุด P

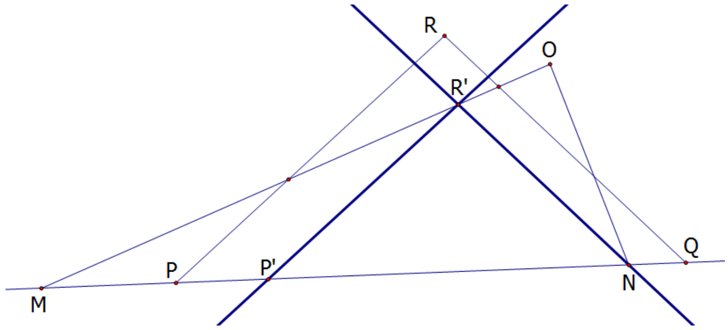


ภาพที่ 4.2.4 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้ง 4.2.2 กรณีที่ 4 รูปที่ 2

สร้างเส้นขนาน $\overline{MO}$ ผ่านจุด X ซึ่งอยู่ระหว่าง P กับ Q สังเกตว่า $XYQ \sim PO'Q$ แต่ $XQ < PQ$ จึงได้ว่า $XY < PO'$ ด้วย ในทำนองเดียวกัน หาก X อยู่บนส่วนของเส้นตรง $\overline{PR}$ ก็จะได้ข้อสรุปในทำนองเดียวกัน ดังนั้นส่วนของ

เส้นตรงที่ขนาน $\overline{MO}$ และอยู่ใน PQR จะยาวที่สุดเมื่อผ่านจุด P แสดงว่า $PO'Q$ เป็นรูปที่ใหญ่ที่สุดที่สอดคล้อง

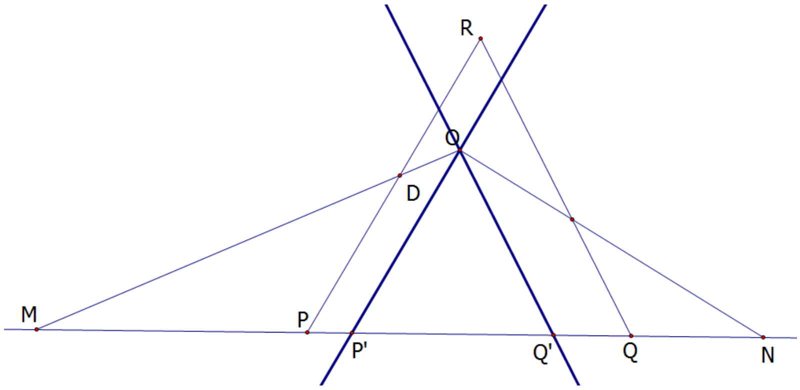
กรณีที่ 5 $O\hat{M}N > R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M \le R\hat{Q}P$



ภาพที่ 4.2.5 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้ง 4.2.2 กรณีที่ 5

สร้างเส้นขนาน $\overline{QR}$ ผ่าน N ตัด $\overline{MO}$ ที่ R' จาก R' สร้างเส้นขนาน $\overline{PR}$ ตัด $\overline{MN}$ ที่ P' สังเกตว่าสามารถพิสูจน์ได้ด้วยวิธีเดียวกับกรณีที่ 4

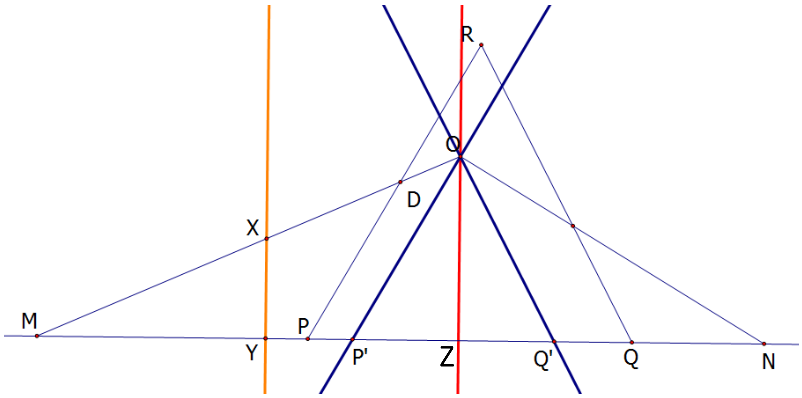
กรณีที่ 6 $O\hat{M}N > R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M > R\hat{Q}P$



ภาพที่ 4.2.6 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้ง 4.2.2 กรณีที่ 6 รูปที่ 1

สร้างเส้นขนาน $\overline{PR}$ และ $\overline{QR}$ ผ่าน O ตัด $\overline{PQ}$ ที่ P' และ Q' ตามลำดับ สังเกตว่า $P'OQ' \sim PRQ$ และอยู่ภายใน MON จากบทตั้ง 4.2.1 จะได้ว่าสามเหลี่ยมที่คล้ายกับ PRQ และเล็กกว่า $P'OQ'$ จะสามารถถูก $P'OQ'$ ปิดทับได้สนิท นั่นคือจะอยู่ใน MON ด้วย ต่อไปจะแสดงว่า $PO'Q$ เป็นรูปที่ใหญ่ที่สุดที่สอดคล้อง นั่นคือเป็นสามเหลี่ยม $\mathcal{A}'$ นั่นเอง

จะแสดงว่าส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ $\overline{MN}$ และอยู่ใน MON จะยาวที่สุดเมื่อผ่านจุด O



ภาพที่ 4.2.7 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้ง 4.2.2 กรณีที่ 6 รูปที่ 2

สร้างเส้นตั้งฉากกับ $\overline{MN}$ ผ่านจุด X ซึ่งอยู่บน $\overline{MO}$ ตัด $\overline{MN}$ ที่จุด Y สังเกตว่า $XYM \sim OZM$ แต่ $MX < MO$ จึงได้ว่า $XY < OZ$ ด้วย ในทำนองเดียวกัน หาก X อยู่บนส่วนของเส้นตรง $\overline{NO}$ ก็จะได้ข้อสรุปในทำนองเดียวกัน นั่นคือส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ $\overline{MN}$ และอยู่ใน MON จะยาวสุดเมื่อผ่านจุด O หรือก็คือส่วนสูงที่ตั้งฉากกับ $\overline{MN}$ ของสามเหลี่ยมใดๆที่มีด้านร่วม $\overline{MN}$ และอยู่ภายใน MON จะน้อยกว่าหรือเท่ากับ OZ' จึงได้ว่า $PO'Q$ เป็นรูปที่ใหญ่ที่สุดที่สอดคล้อง

บทตั้ง 4.2.3

ให้รูป MNO และ PQR แทนด้วย $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$ ตามลำดับ เป็นสามเหลี่ยมใดๆที่มีด้านร่วมกัน 1 ด้าน โดยที่ด้าน $\overline{MN}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$ และ M อยู่ใกล้ P มากกว่า N จะได้ว่ามีสามเหลี่ยม $M'N'O' \sim MNO$ เรียกว่าสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ ซึ่งทำให้สามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ สามารถซ้อนทับสามเหลี่ยม $\mathcal{B}$ ได้พอดี และจะเรียกสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดว่าสามเหลี่ยม $\mathcal{A}''$

บทพิสูจน์ จากบทตั้ง 4.2.2 จะได้ว่าบทตั้ง 4.2.3 เป็นจริง □

ต่อไปจะอธิบายกระบวนการหาตำแหน่งที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดสำหรับสามเหลี่ยมสองรูปที่ไม่คล้ายกัน รวมถึงบทพิสูจน์ในกรณีต่างๆ

จาก บทตั้ง 4.2.1 สังเกตว่าหากพิจารณาสามเหลี่ยมรูป MNO และ PQR เป็นสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน โดยที่ด้าน $\overline{MN}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$ และ M อยู่ใกล้ P มากกว่า N โดยที่ $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M = R\hat{Q}P$ เลื่อนขนานสามเหลี่ยมรูปหนึ่งขนานกับด้านร่วมจน $\overline{MO}$ ซ้อนทับ $\overline{PR}$ สามเหลี่ยมทั้งสองจะมีด้านร่วม 2 ด้านและมุมร่วม 1 มุมซึ่งทำให้ซ้อนทับกันได้พอดี นั่นคือเกิดพื้นที่ซ้อนทับสูงสุดเมื่อด้าน $\overline{MN}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$ ดังนั้นกระบวนการที่จะกล่าวต่อไปนี้จะไม่พิจารณากรณีที่ ที่ $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ และ $O\hat{N}M = R\hat{Q}P$

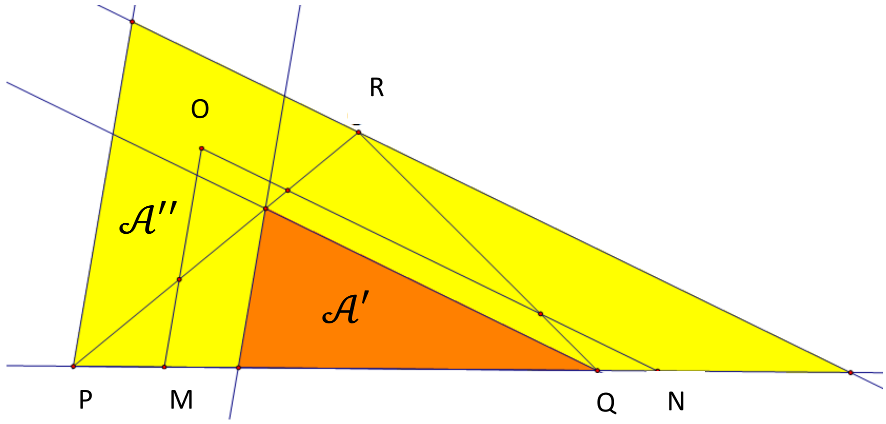
กระบวนการ 4.2.1

ให้รูป MNO และ PQR แทนด้วย $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$ ตามลำดับเป็นสามเหลี่ยมใดๆซึ่งซ้อนทับกันไม่สนิทและมีด้านร่วมกัน 1 ด้าน โดยที่ด้าน $\overline{MN}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$ และ M อยู่ใกล้ P มากกว่า N โดยมีเงื่อนไขดังนี้

- ถ้า $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ แล้ว $O\hat{N}M \neq R\hat{Q}P$
- ถ้า $O\hat{N}M = R\hat{Q}P$ แล้ว $O\hat{M}N \neq R\hat{P}Q$

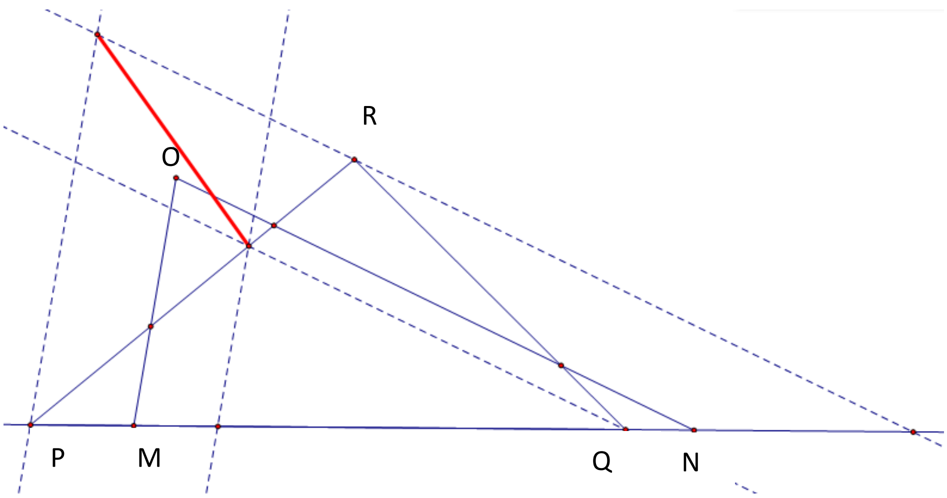
จะมีกระบวนการหาตำแหน่งที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดดังนี้

1. สร้างสามเหลี่ยม $\mathcal{A}'$ และ $\mathcal{A}''$



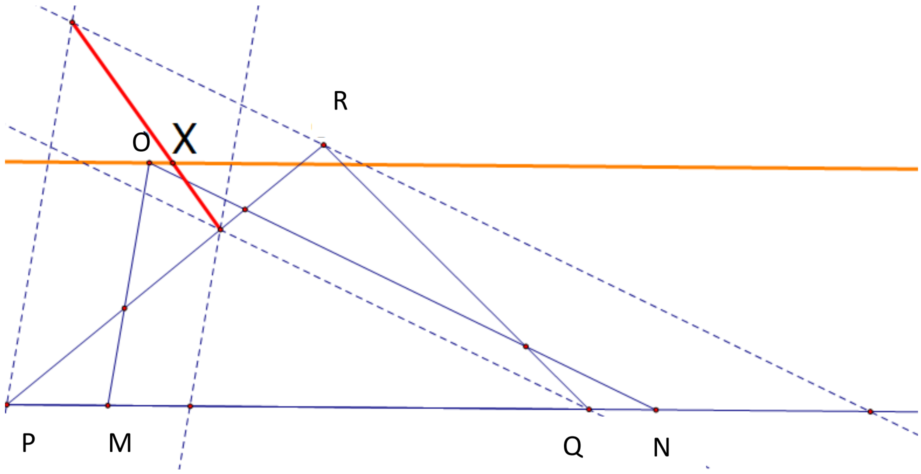
ภาพที่ 4.2.8 รูปประกอบกระบวนการ 4.2.1 ขั้นที่ 1

2. ลากเส้นเชื่อมจุดยอดของ $\mathcal{A}'$ และ $\mathcal{A}''$ ที่ไม่ได้อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกันกับด้านร่วมของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$



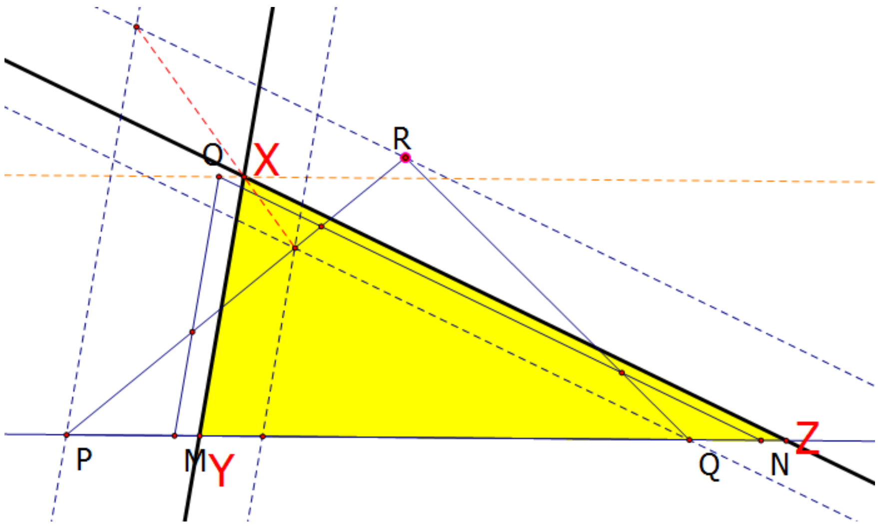
ภาพที่ 4.2.9 รูปประกอบกระบวนการ 4.2.1 ขั้นที่ 2

3. สร้างเส้นขนานด้านร่วมผ่านจุดยอดที่ไม่ได้อยู่บนด้านร่วมของ $\mathcal{A}$ ตัดกับส่วนเส้นตรงในข้อ 2 ที่จุด X



ภาพที่ 4.2.10 รูปประกอบกระบวนการ 4.2.1 ขั้นที่ 3

4. จากจุด X ลากเส้นขนานกับด้านของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ ตัดด้านร่วมที่ Y และ Z



ภาพที่ 4.2.11 รูปประกอบกระบวนการ 4.2.1 ขั้นที่ 4

5. จากบทสร้างทางเรขาคณิตจะเกิดรูป XYZ เรียกว่าสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ ซึ่งเท่ากันทุกประการกับสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$
6. จะได้ว่าตำแหน่งของสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ จะมีพื้นที่ซ้อนทับกับ $\mathcal{B}$ มากที่สุดเมื่อมีด้าน $\overline{MN}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$

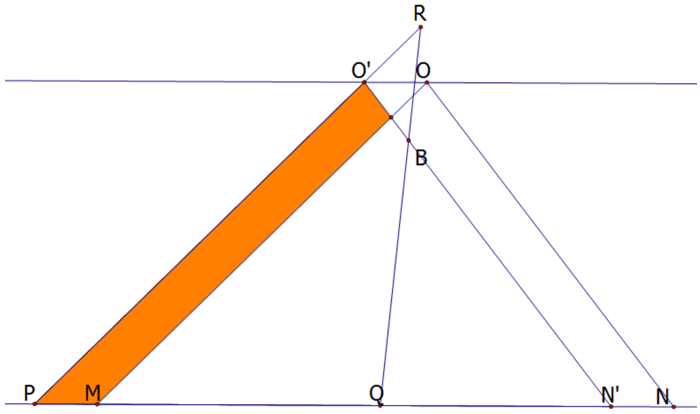
บทพิสูจน์ พิจารณารูปสามเหลี่ยมตามเงื่อนไขเบื้องต้น

โดยไม่เสียนัยทั่วไปกำหนดให้ $O\hat{M}N \le R\hat{P}Q$ กล่าวคือถ้า $O\hat{M}N \ge R\hat{P}Q$ จะพิจารณาโดยยึด $\mathcal{A}$ เป็นหลัก แล้วสร้าง $\mathcal{B}'$ กับ $\mathcal{B}''$ แล้วทำตามกระบวนการเดิม

ถ้า $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ จากข้อกำหนดดังนั้น $O\hat{N}M \neq R\hat{Q}P$ จากบทตั้ง 4.2.2 และ 4.2.3 สังเกตได้โดยง่ายว่ารูป $\mathcal{A}'$ และ $\mathcal{A}''$ จะมีด้าน $\overline{MO}$ ซ้อนทับ $\overline{PR}$ นั่นคือ X จะอยู่บน $\overline{MO}$ ด้วย ดังนั้นจะพิสูจน์ว่าพื้นที่ซ้อนทับจะมากที่สุดเมื่อด้าน $\overline{MO}$ ซ้อนทับ $\overline{PR}$

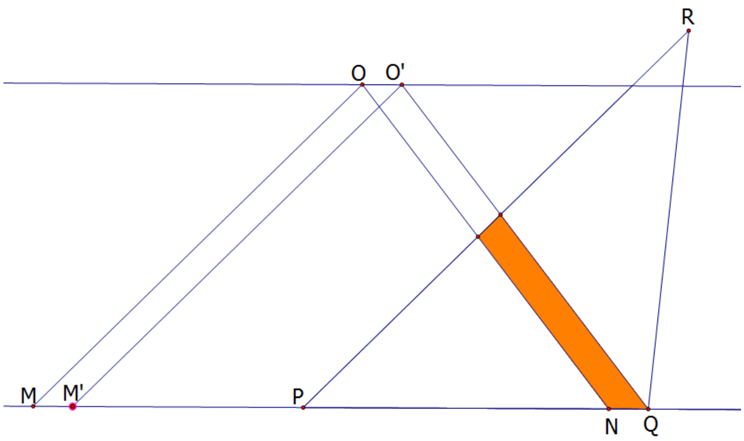
โดยไม่เสียนัยทั่วไปกำหนดให้ $O\hat{N}M < R\hat{Q}P$ เนื่องจากหาก $O\hat{N}M > R\hat{Q}P$ จะสามารถพิจารณาโดยมองรูป MNO และ PQR กลับกัน

ขั้นแรกจะพิสูจน์ว่าพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดจะเกิดเมื่อ P อยู่บน M'



ภาพที่ 4.2.12 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 เมื่อ $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ รูปที่ 1

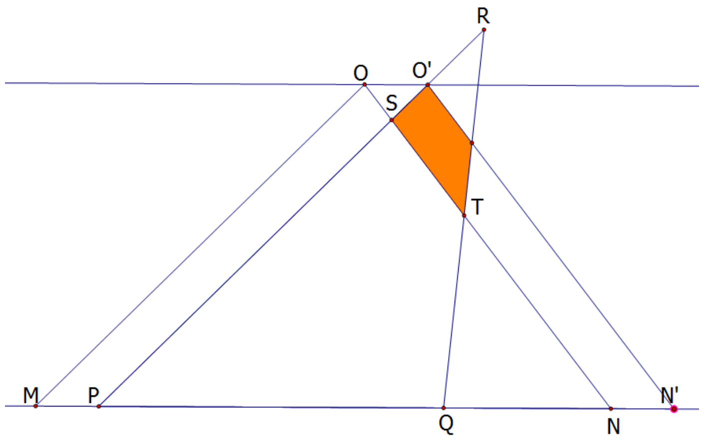
พิจารณาสามเหลี่ยม MNO มี M อยู่ระหว่าง P,Q และสามเหลี่ยม $M'N'O'$ เท่ากันทุกประการกับ MNO มี O' อยู่บน $\overline{PR}$ ดังภาพ สังเกตได้โดยง่ายว่าพื้นที่ซ้อนทับของ PQR กับ $M'N'O'$ มากกว่า PQR กับ MNO



ภาพที่ 4.2.13 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 เมื่อ $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ รูปที่ 2

พิจารณาสามเหลี่ยม MNO มี N อยู่ระหว่าง P,Q และสามเหลี่ยม $M'N'O'$ เท่ากันทุกประการกับ MNO มี N' อยู่บน Q ดังภาพ สังเกตได้โดยง่ายว่าพื้นที่ซ้อนทับของ PQR กับ $M'N'O'$ มากกว่า PQR กับ MNO

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดจะเกิดเมื่อ P,Q อยู่ระหว่างหรือบน M,N



ภาพที่ 4.2.14 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 เมื่อ $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ รูปที่ 3

พิจารณารูปสามเหลี่ยม MNO ที่ P,Q อยู่ระหว่างหรือบน M,N และสามเหลี่ยม $M'N'O'$ เท่ากันทุกประการกับ MNO มี M' อยู่บนจุด P ดังภาพ สังเกตได้โดยง่ายว่าพื้นที่ซ้อนทับของ PQR กับ $M'N'O'$ มากกว่า PQR กับ MNO

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดจะเกิดเมื่อ P อยู่บน M'

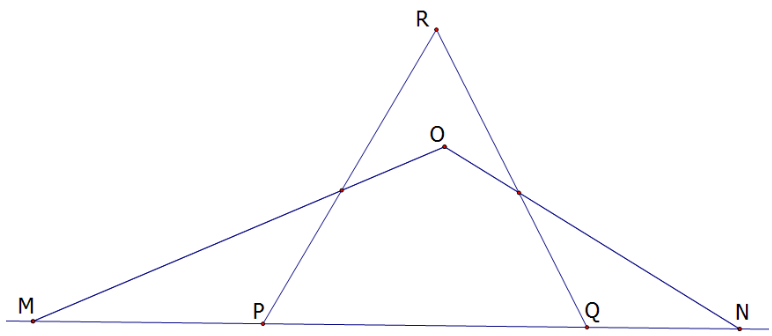
ถ้า $O\hat{M}N < R\hat{P}Q$ ในกรณีที่ $M\hat{N}O = R\hat{Q}P$ สามารถพิจารณาได้เหมือนกรณีที่ $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ ดังนั้นแบ่งออกเป็น 2 กรณีใหญ่โดยพิจารณาจากมุมของสามเหลี่ยมทั้งสอง ดังนี้

กรณีที่ 1 $O\hat{N}M < R\hat{Q}P$

กรณีที่ 2 $O\hat{N}M > R\hat{Q}P$

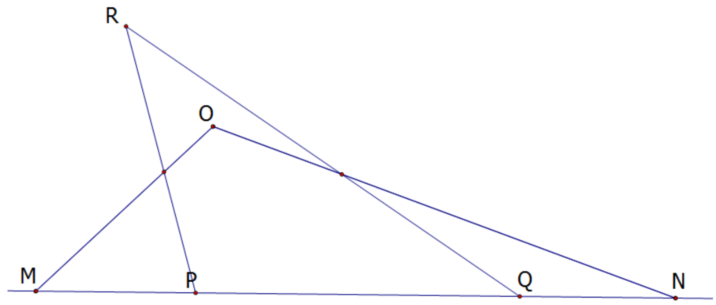
กรณีที่ 1 $O\hat{N}M < R\hat{Q}P$ แบ่งออกได้เป็น 5 กรณีย่อย ได้แก่

กรณีที่ 1.1 $O\hat{N}M, O\hat{M}N, R\hat{Q}P, R\hat{P}Q \le 90°$



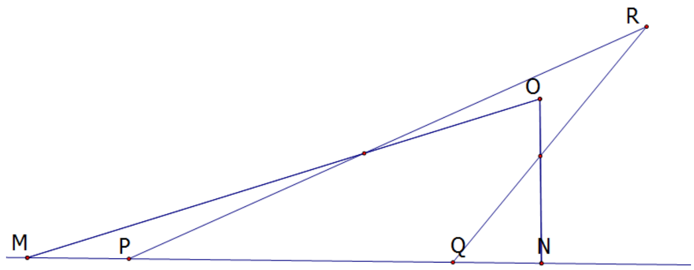
ภาพที่ 4.2.15 ตัวอย่างรูปกระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 1.1

กรณีที่ 1.2 $O\hat{N}M, O\hat{M}N, R\hat{Q}P \le 90°, R\hat{P}Q \ge 90°$



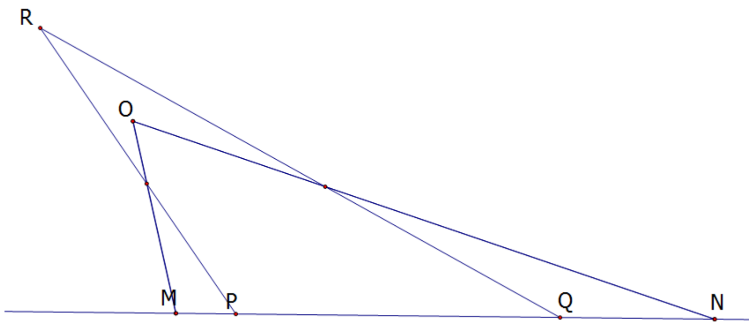
ภาพที่ 4.2.16 ตัวอย่างรูปกระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 1.2

กรณีที่ 1.3 $O\hat{N}M, O\hat{M}N, R\hat{P}Q \le 90°, R\hat{Q}P \ge 90°$



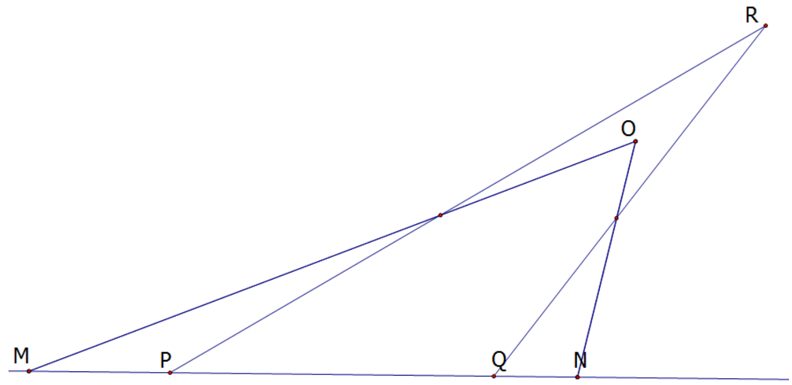
ภาพที่ 4.2.17 ตัวอย่างรูปกระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 1.3

กรณีที่ 1.4 $O\hat{N}M, R\hat{Q}P \le 90°, R\hat{P}Q, O\hat{M}N \ge 90°$



ภาพที่ 4.2.18 ตัวอย่างรูปกระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 1.4

กรณีที่ 1.5 $O\hat{N}M, R\hat{Q}P \geq 90°, R\hat{P}Q, O\hat{M}N \leq 90°$

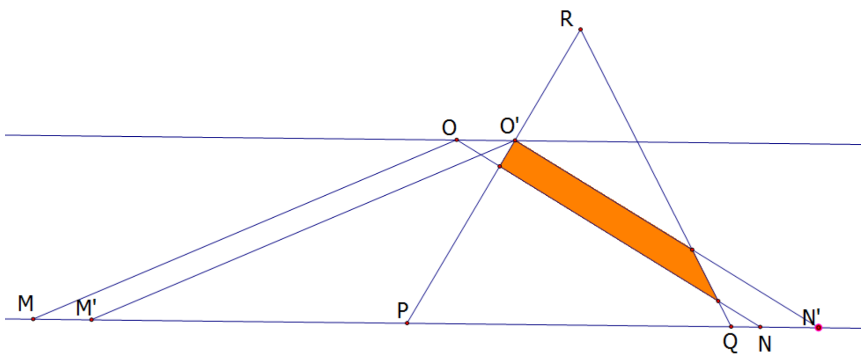


ภาพที่ 4.2.19 ตัวอย่างรูปกระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 1.5

สังเกตว่ากรณีที่ 1.3 เมื่อสะท้อนทั้งหมดจะเข้ากับกรณีที่ 1.2 ได้ นั่นคือสามารถทำในทำนองเดียวกันได้ ดังนั้นพิจารณาเพียงแค่กรณีที่ 1.2 ในทำนองเดียวกันจะไม่พิจารณากรณีที่ 1.5 เพราะสามารถทำในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1.4 ได้

กรณีที่ 1.1 $O\hat{N}M, O\hat{M}N, R\hat{Q}P, R\hat{P}Q \leq 90°$

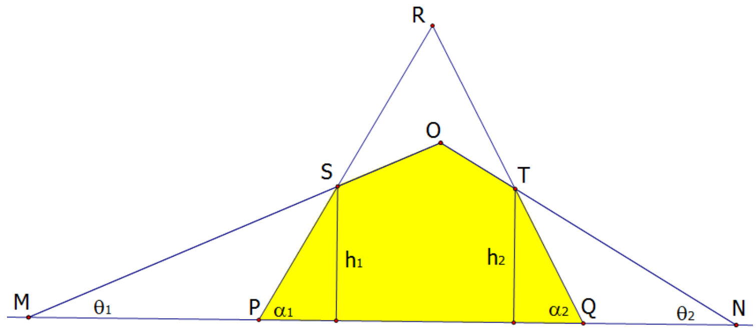
ขั้นแรกจะพิสูจน์ว่าตำแหน่งของ $\mathcal{A}$ ที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับสูงสุดจะมีจุด O อยู่บนด้านหรือภายใน $\mathcal{B}$



ภาพที่ 4.2.20 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 1.1 รูปที่ 1

พิจารณาสามเหลี่ยม MNO มี O อยู่นอก PQR ไปทางด้าน PR สามเหลี่ยม $M'N'O'$ เท่ากันทุกประการกับ MNO มี O' อยู่บน PR ดังภาพ สังเกตได้โดยง่ายว่าพื้นที่ซ้อนทับของ PQR กับ $M'N'O'$ มากกว่า PQR กับ MNO ในทำนองเดียวกันเมื่อ O อยู่นอก PQR ไปทางด้าน QR ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ตำแหน่งของ $\mathcal{A}$ ที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับสูงสุดจะมีจุด O อยู่บนด้านหรือภายใน $\mathcal{B}$

ต่อไปจะหาตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับนั่นคือพื้นที่สีเหลืองในภาพมีค่ามากที่สุด



ภาพที่ 4.2.21 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 1.1 รูปที่ 2

กำหนดให้ $\overline{MO}$ ตัดกับ $\overline{PR}$ ที่ S และ $\overline{NO}$ ตัดกับ $\overline{QR}$ ที่ T ดังภาพ

จาก S และ T ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับ $\overline{MN}$ มีความยาว h_1, h_2 ตามลำดับ

กำหนดให้ $O\hat{M}N = \theta_1,\ O\hat{N}M = \theta_2, R\hat{P}Q = \alpha_1, R\hat{Q}P = \alpha_2$

กำหนดให้ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2$

และ $p = MN - PQ = MP + QN$ เนื่องจาก MN, PQ เป็นความยาวฐานของสามเหลี่ยมทั้งสอง ดังนั้น p เป็นค่าคงที่เสมอทุกตำแหน่งของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และจากตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$MP = \cot\theta_1 h_1 - \cot\alpha_1 h_1 = mh_1$$

และ

$$QN = \cot\theta_2 h_2 - \cot\alpha_2 h_2 = nh_2$$

$$\therefore p = mh_1 + nh_2$$

จึงได้ว่า

$$h_2 = \frac{p - mh_1}{n}$$

เนื่องจากพื้นที่สามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ มีค่าคงที่ และจาก

$$\left[PQTOS\right] = \left[MNO\right] - \left[MPS\right] - [NQT]$$

ดังนั้นการหา $[PQTOS]$ ที่มากที่สุด สมมูลกับการหา $k = \left[MPS\right] + [NQT]$ ที่น้อยที่สุด

พิจารณา $\left[MPS\right] = \frac{1}{2}\left(MP\right)h_1 = \frac{1}{2}mh_1^2$

ในทำนองเดียวกันได้ว่า $\left[NQT\right] = \frac{1}{2}\left(NQ\right)h_2 = \frac{1}{2}nh_2^2$

ดังนั้น

$$k = \left[MPS\right] + \left[NQT\right] = \frac{1}{2}mh_1^2 + \frac{1}{2}nh_2^2$$

จาก $h_2 = \dfrac{p - mh_1}{n}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2}mh_1^2 + \frac{1}{2}n\left(\frac{p - mh_1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(mh_1^2 + \left(\frac{p^2 - 2pmh_1 + m^2h_1^2}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{mnh_1^2 + p^2 - 2pmh_1 + m^2h_1^2}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2n}\left(\left(m^2 + mn\right)h_1^2 - \left(2pm\right)h_1 + p^2\right) \end{aligned}$$

จะได้ k ในรูปของตัวแปร h_1 โดยที่ m, n, p เป็นค่าคงที่ ต้องการหาค่าต่ำสุดของ k

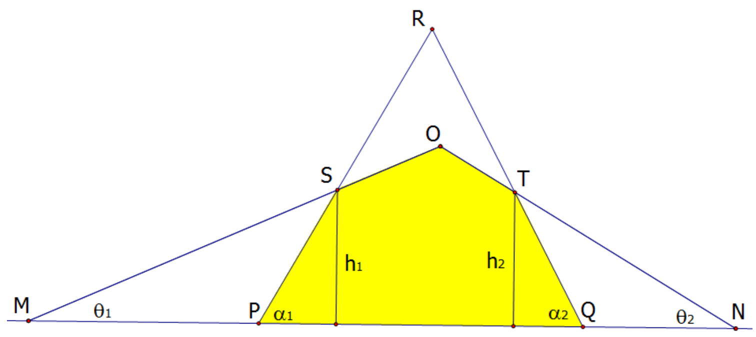
สังเกตว่า $k'' = \dfrac{d^2k}{dh_1^2} = \dfrac{m^2 + mn}{n} > 0$ นั่นคือ k มีค่าต่ำสุด

พิจารณา $k' = \dfrac{dk}{dh_1} = \dfrac{1}{2n}\left(2\left(m^2 + mn\right)h_1 - 2pm\right) = 0$

จะได้ว่า $h_1 = \dfrac{p}{n + m}$ และเมื่อแทนค่ากลับจะได้ว่า

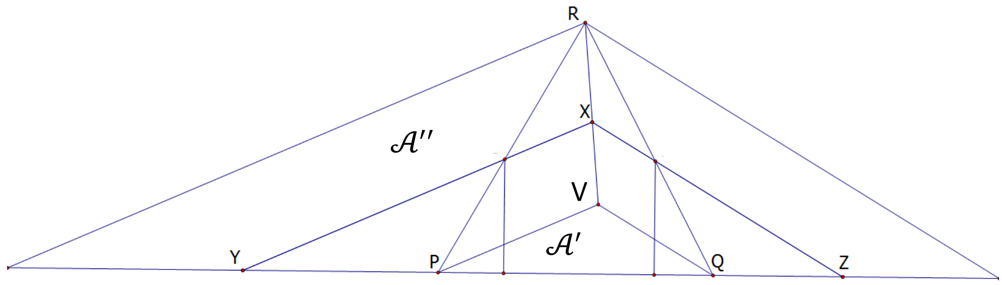
$$h_1 = h_2 = \frac{p}{m + n}$$

เมื่อ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2, p = MN - PQ$
เป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ k มีค่าต่ำสุด นั่นคือพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด
ต่อไปจะแสดงว่าตำแหน่งดังกล่าวเป็นตำแหน่งเดียวกับสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$



ภาพที่ 4.2.22 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 1.1 รูปที่ 3

สร้างรูปตามกระบวนการ 1 ดังภาพ

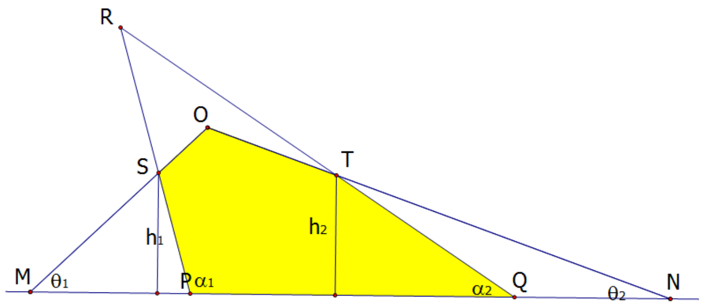


ภาพที่ 4.2.23 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 1.1 รูปที่ 4

ลาก $\overline{ST}$ จาก $h_1 = h_2$ จะได้ว่า $\overline{ST} \parallel \overline{MN}$ ดังนั้น
$\triangle STO \sim \triangle MNO \sim \triangle PQV$ และจาก R,S,P และ R,T,Q อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะได้ว่า R,X,V อยู่บนเส้นตรงเดียวกันด้วย
นั่นคือสามเหลี่ยมที่สร้างตามกระบวนการดังกล่าวเป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด

กรณีที่ 1.2 $O\hat{N}M, O\hat{M}N, R\hat{Q}P \le 90°, R\hat{P}Q \ge 90°$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1.1 สามารถพิสูจน์ได้ว่าตำแหน่งของ $\mathcal{A}$ ที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับสูงสุดจะมีจุด O อยู่บนด้านหรือภายใน $\mathcal{B}$
ต่อไปจะหาตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับนั่นคือพื้นที่สีเหลืองในภาพมีค่ามากที่สุด



ภาพที่ 4.2.24 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 1.2

กำหนดให้ $\overline{MO}$ ตัดกับ $\overline{PR}$ ที่ S และ $\overline{NO}$ ตัดกับ $\overline{QR}$ ที่ T ดังภาพ
จาก S และ T ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับ $\overline{MN}$ มีความยาว h_1, h_2 ตามลำดับ
กำหนดให้ $O\hat{M}N = \theta_1,\ O\hat{N}M = \theta_2, R\hat{P}Q = \alpha_1, R\hat{Q}P = \alpha_2$
กำหนดให้ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2$
และ $p = MN - PQ = MP + QN$ เนื่องจาก MN, PQ เป็นความยาวฐานของสามเหลี่ยมทั้งสอง ดังนั้น p เป็นค่าคงที่เสมอทุกตำแหน่งของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และจากตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$MP = \cot\theta_1 h_1 + \cot\left(180^\circ - \alpha_1\right)h_1 = \left(\cot\theta_1 - \cot\alpha_1\right)h_1 = mh_1$$

และ

$$QN = \cot\theta_2 h_2 - \cot\alpha_2 h_2 = nh_2$$
$$\therefore p = mh_1 + nh_2$$

จึงได้ว่า

$$h_2 = \frac{p - mh_1}{n}$$

ทำในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1.1 จะได้ว่า

$$h_1 = h_2 = \frac{p}{m+n}$$

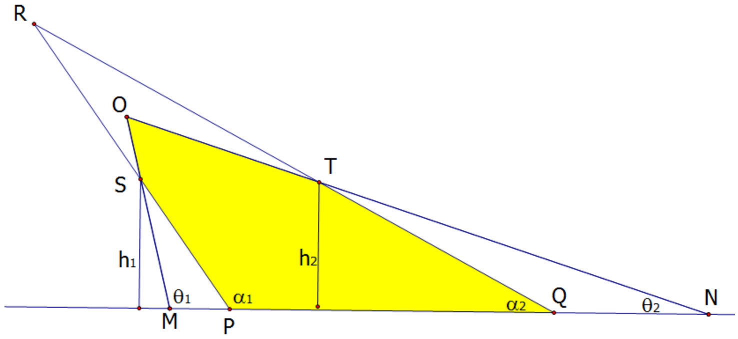
เมื่อ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2, p = MN - PQ$
เป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ k มีค่าต่ำสุด นั่นคือพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1.1 จะได้ว่าตำแหน่งดังกล่าวเป็นตำแหน่งเดียวกับสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$

กรณีที่ 1.4 $O\hat{N}M, R\hat{Q}P \le 90°, R\hat{P}Q, O\hat{M}N \ge 90°$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1.1 สามารถพิสูจน์ได้ว่าตำแหน่งของ $\mathcal{A}$ ที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับสูงสุดจะมีจุด O อยู่บนด้านหรือภายใน $\mathcal{B}$

ต่อไปจะหาตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับนั่นคือพื้นที่สีเหลืองในภาพมีค่ามากที่สุด



ภาพที่ 4.2.25 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 1.4

กำหนดให้ $\overline{MO}$ ตัดกับ $\overline{PR}$ ที่ S และ $\overline{NO}$ ตัดกับ $\overline{QR}$ ที่ T ดังภาพ

จาก S และ T ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับ $\overline{MN}$ มีความยาว h_1, h_2 ตามลำดับ

กำหนดให้ $O\hat{M}N = \theta_1,\ O\hat{N}M = \theta_2, R\hat{P}Q = \alpha_1, R\hat{Q}P = \alpha_2$

กำหนดให้ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2$

และ $p = MN - PQ = MP + QN$ เนื่องจาก MN, PQ เป็นความยาวฐานของสามเหลี่ยมทั้งสอง ดังนั้น p เป็นค่าคงที่เสมอทุกตำแหน่งของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และจากตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$MP = \cot(180° - \alpha_1)h_1 - \cot(180° - \theta_1)h_1 = (\cot\theta_1 - \cot\alpha_1)h_1 = mh_1$$

และ
$$QN = \cot\theta_2 h_2 - \cot\alpha_2 h_2 = nh_2$$

$$\therefore p = mh_1 + nh_2$$

จึงได้ว่า
$$h_2 = \frac{p - mh_1}{n}$$

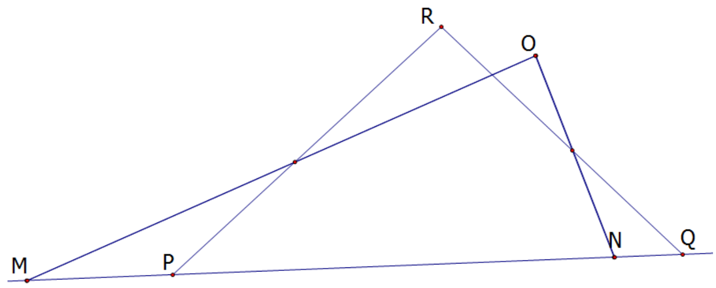
ทำในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1.1 จะได้ว่า

$$h_1 = h_2 = \frac{p}{m+n}$$

เมื่อ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2, p = MN - PQ$
เป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ k มีค่าต่ำสุด นั่นคือพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด
ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1.1 จะได้ว่าตำแหน่งดังกล่าวเป็นตำแหน่งเดียวกับสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$

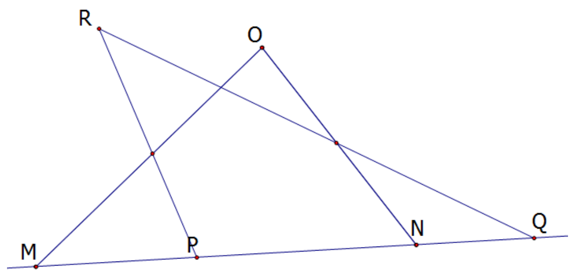
กรณีที่ 2 $O\hat{N}M > R\hat{Q}P$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ O ใกล้ N มากกว่า M เนื่องจากหากให้ O ใกล้ M มากกว่า N จะสามารถพิจารณาแบบสะท้อนกันได้ และแบ่งออกได้เป็น 6 กรณีย่อย ได้แก่

กรณีที่ 2.1 $O\hat{N}M, O\hat{M}N, R\hat{Q}P, R\hat{P}Q \le 90°$



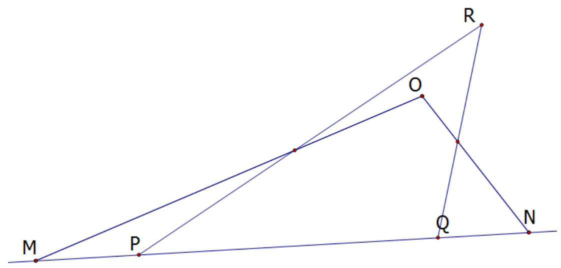
ภาพที่ 4.2.26 ตัวอย่างรูปกระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.1

กรณีที่ 2.2 $O\hat{N}M, O\hat{M}N, R\hat{Q}P \le 90°, R\hat{P}Q \ge 90°$



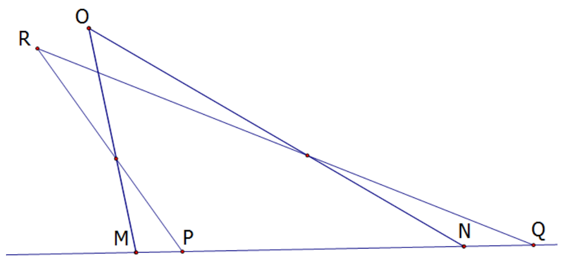
ภาพที่ 4.2.27 ตัวอย่างรูปกระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.2

กรณีที่ 2.3 $O\hat{N}M, O\hat{M}N, R\hat{P}Q \le 90°, R\hat{Q}P \ge 90°$



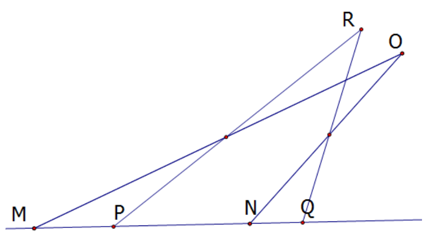
ภาพที่ 4.2.28 ตัวอย่างรูปกระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.3

กรณีที่ 2.4 $O\hat{N}M, R\hat{Q}P \le 90°, R\hat{P}Q, O\hat{M}N \ge 90°$



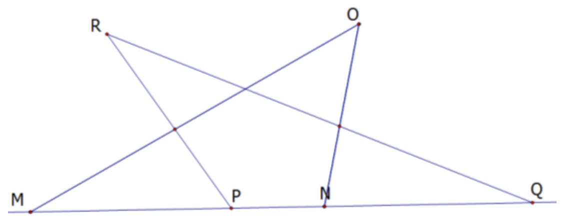
ภาพที่ 4.2.29 ตัวอย่างรูปกระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.4

กรณีที่ 2.5 $O\hat{N}M, R\hat{Q}P \ge 90°, R\hat{P}Q, O\hat{M}N \le 90°$



ภาพที่ 4.2.30 ตัวอย่างรูปกระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.5

กรณีที่ 2.6 $O\hat{N}M, R\hat{P}Q \ge 90°, R\hat{Q}P, O\hat{M}N \le 90°$

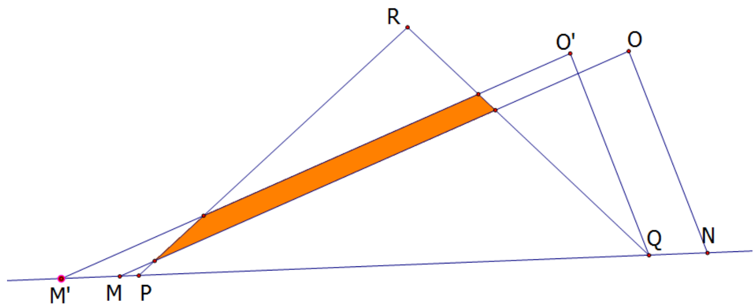


ภาพที่ 4.2.31 ตัวอย่างรูปกระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.6

สังเกตว่ากรณีที่ 2.3 เมื่อสะท้อนทั้งหมดจะเข้ากับกรณีที่ 2.2 ได้ นั่นคือสามารถทำในทำนองเดียวกันได้ ดังนั้นพิจารณาเพียงแค่กรณีที่ 2.2 ในทำนองเดียวกันจะไม่พิจารณากรณีที่ 2.5 เพราะสามารถทำในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 2.4 ได้

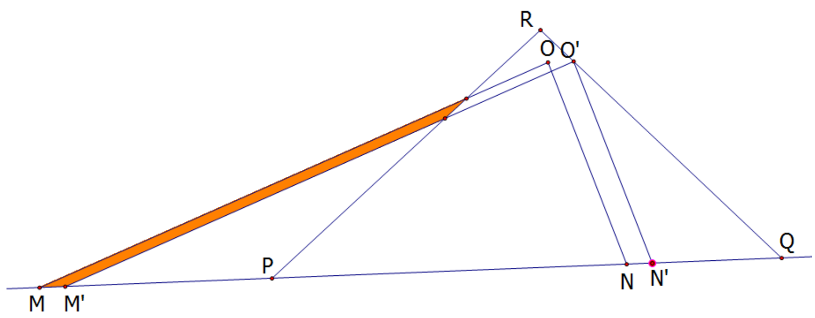
กรณีที่ 2.1 $O\hat{N}M, O\hat{M}N, R\hat{Q}P, R\hat{P}Q \leq 90^\circ$

ขั้นแรกจะพิสูจน์ว่าตำแหน่งของ $\mathcal{A}$ ที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับสูงสุดจะอยู่ในช่วงตั้งแต่จุด N ตรงกับจุด Q จนถึงจุด O อยู่บนเส้นตรง $\overline{QR}$



ภาพที่ 4.2.32 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.1 รูปที่ 1

พิจารณาสามเหลี่ยม MNO มี N อยู่นอก PQR ไปทางด้าน QR สามเหลี่ยม $M'N'O'$ เท่ากันทุกประการกับ MNO มี N' อยู่บน Q ดังภาพ สังเกตได้โดยง่ายว่าพื้นที่ซ้อนทับของ PQR กับ $M'N'O'$ มากกว่า PQR กับ MNO

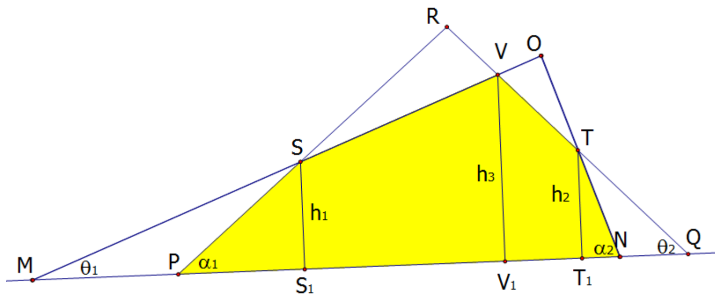


ภาพที่ 4.2.33 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.1 รูปที่ 2

พิจารณาสามเหลี่ยม MNO มี O อยู่ด้านใน PQR หรือ อยู่นอก PQR ไปทางด้าน $\overline{PR}$ สามเหลี่ยม $M'N'O'$ เท่ากันทุกประการกับ MNO มี O' อยู่บน $\overline{RQ}$ ดังภาพ สังเกตได้โดยง่ายว่าพื้นที่ส่วนที่ไม่ถูกซ้อนทับของ PQR กับ MNO มากกว่า PQR กับ $M'N'O'$ แสดงว่าพื้นที่ซ้อนทับของ PQR กับ $M'N'O'$ มากกว่า PQR กับ MNO จึงได้ว่าตำแหน่งของ $\mathcal{A}$ ที่ทำให้พื้นที่

ซ้อนทับสูงสุดจะอยู่ในช่วงตั้งแต่จุด N ตรงกับจุด Q จนถึงจุด O อยู่บนเส้นตรง $\overline{QR}$

ต่อไปจะหาตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับนั่นคือพื้นที่สีเหลืองในภาพมีค่ามากที่สุด



ภาพที่ 4.2.34 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.1 รูปที่ 3

กำหนดให้ $\overline{MO}$ ตัดกับ $\overline{PR}$ ที่ S และ $\overline{NO}$ ตัดกับ $\overline{QR}$ ที่ V,T ดังภาพ

จาก S,T,V และ R ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับ $\overline{MN}$ ที่ S_1,T_1,V_1,R_1 มีความยาว h_1,h_2,h_3,h ตามลำดับ

กำหนดให้ $O\hat{M}N = \theta_1,\ O\hat{N}M = \alpha_2, R\hat{P}Q = \alpha_1, R\hat{Q}P = \theta_2$

กำหนดให้ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2$

และ $r = \cot\theta_1 + \cot\theta_2$

และ $p = MN - PQ = \left(MP + PN\right) - (PN + QN) = MP - QN$

เนื่องจาก MN, PQ เป็นความยาวฐานของสามเหลี่ยมทั้งสอง ดังนั้น p เป็นค่าคงที่เสมอทุกตำแหน่งของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และจากตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$MP = MS_1 - PS_1 = \cot\theta_1 h_1 - \cot\alpha_1 h_1 = mh_1$$

และ

$$QN = QT_1 - \mathrm{N}T_1 = \cot\theta_2 h_2 - \cot\alpha_2 h_2 = nh_2$$

$$\therefore p = mh_1 - nh_2$$

จึงได้ว่า

$$h_2 = \frac{mh_1 - p}{n}$$

ต้องการหา $[PSVTN]$ ที่มากที่สุด

พิจารณา $\left[PSVTN\right] = \left[PSS_1\right] + \left[SS_1V_1V\right] + \left[V_1T_1TV\right] + \left[TT_1N\right]$

พิจารณา $\left[PSS_1\right] = \frac{1}{2}\left(PS_1\right)\left(h_1\right) = \frac{1}{2}h_1^2 \cot \alpha_1$

พิจารณา $\left[TT_1N\right] = \frac{1}{2}\left(QT_1\right)\left(h_2\right) = \frac{1}{2}h_2^2 \cot \alpha_2$

พิจารณา $\left[SS_1V_1V\right] = \frac{1}{2}\left(S_1V_1\right)\left(h_1 + h_3\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(h_3 \cot \theta_1 - h_1 \cot \theta_1\right)\left(h_1 + h_3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(h_3^2 - h_1^2\right)\cot \theta_1$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\left[V_1T_1TV\right] = \frac{1}{2}\left(h_3^2 - h_2^2\right)\cot \theta_2$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\left[PSVTN\right] &= \frac{1}{2}h_1^2 \cot \alpha_1 + \frac{1}{2}\left(h_3^2 - h_1^2\right)\cot \theta_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(h_3^2 - h_2^2\right)\cot \theta_2 + \frac{1}{2}h_2^2 \cot \alpha_2 \\
&= \frac{1}{2}h_1^2\left(\cot \alpha_1 - \cot \theta_1\right) + \frac{1}{2}h_2^2\left(\cot \alpha_2 - \cot \theta_2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\cot \theta_1 + \cot \theta_2\right)h_3^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(-m\right)h_1^2 + \frac{1}{2}\left(-n\right)h_2^2 + \frac{1}{2}rh_3^2 \\
&= \frac{1}{2}rh_3^2 - \left(\frac{1}{2}mh_1^2 + \frac{1}{2}nh_2^2\right)
\end{aligned}$$

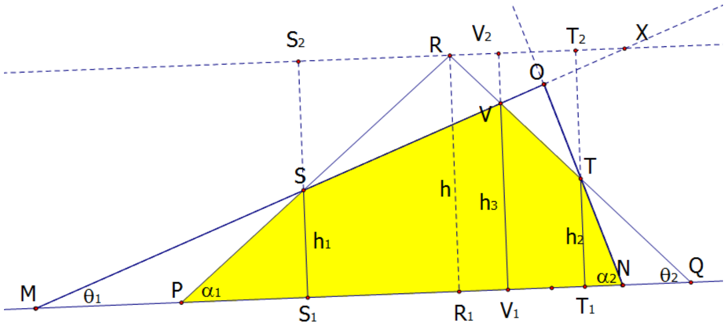
จาก $h_2 = \frac{mh_1 - p}{n}$ ให้ $l = \frac{1}{2}mh_1^2 + \frac{1}{2}nh_2^2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
l &= \frac{1}{2}mh_1^2 + \frac{1}{2}n\left(\frac{mh_1 - p}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(mh_1^2 + \left(\frac{p^2 - 2pmh_1 + m^2h_1^2}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{mnh_1^2 + p^2 - 2pmh_1 + m^2h_1^2}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\left(m^2 + mn\right)h_1^2 - 2pmh_1 + p^2\right)$$

ต่อไปจะหาค่า h_3 ในรูปตัวแปร h_1 และค่าคงที่ h, m, n, r



ภาพที่ 4.2.35 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.1 รูปที่ 4

สร้างเส้นขนานด้านร่วมผ่านจุด R ตัด $\overline{MO}$ หรือส่วนต่อที่ X จาก S, T, V ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าวที่ S_2, T_2, V_2

สังเกตว่า $h = h_1 + SS_2 = h_3 + VV_2$

และ $\triangle RSS_2 \sim \triangle PSS_1$ และ $\triangle RSX \sim \triangle PSM$ จึงได้ว่า

$$\frac{XR}{MP} = \frac{RS}{PS} = \frac{SS_2}{SS_1}$$

$$\frac{XR}{mh_1} = \frac{SS_2}{h_1}$$

$$SS_2 = \frac{XR}{m}$$

$$\therefore h = h_1 + \frac{XR}{m}$$

$$XR = m(h - h_1)$$

จากตรีโกณมิติ ได้ว่า $MQ = MV_1 + V_1Q = \cot\theta_1 h_3 + \cot\theta_2 h_3 = rh_3$

สังเกตว่า $\triangle RXV \sim \triangle MQV$

$$\frac{XR}{MQ} = \frac{VV_2}{VV_1}$$

$$\frac{XR}{rh_3} = \frac{VV_2}{h_3}$$

$$VV_2 = \frac{XR}{r}$$

$$\therefore h = h_3 + \frac{XR}{r}$$

$h_3 = h - \dfrac{XR}{r} = h - \dfrac{m\left(h-h_1\right)}{r} = \dfrac{hr - hm + mh_1}{r}$ จะได้ว่า

$$k = \left[PSVTN\right] = \frac{1}{2}rh_3^2 - l$$

$$= \frac{1}{2}r\left(\frac{hr - hm + mh_1}{r}\right)^2 - l$$

$$k = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2r^2 + h^2m^2 + m^2h_1^2 - 2mrh^2 + 2mrhh_1 - 2m^2hh_1}{r}\right) - l$$

จาก $l = \dfrac{1}{2n}\left(\left(m^2 + mn\right)h_1^2 - 2pmh_1 + p^2\right)$

$$\therefore k = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(nm^2 - rm^2 - mnr\right)h_1^2 + \left(2mnrh - 2m^2nh + 2mpr\right)h_1 + \left(nh^2r^2 + nh^2m^2 - 2mnrh^2 - rp^2\right)}{nr}\right)$$

จะได้ k ในรูปของตัวแปร h_1 โดยที่ m, n, p, r เป็นค่าคงที่ ต้องการหาค่าสูงสุดของ k

สังเกตว่า $\cot\theta_1 > \cot\alpha_1$ และ $\cot\theta_2 > \cot\alpha_2$ ดังนั้น

$$\omega_1 = \cot\theta_1\left(\cot\alpha_1 - \cot\theta_1\right) < 0$$

$$\omega_2 = \cot\theta_2\left(\cot\alpha_2 - \cot\theta_2\right) < 0$$

$$\omega_3 = \cot\alpha_1\cot\alpha_2 - \cot\theta_1\cot\theta_2 < 0$$

$$\therefore nm - rm - nr = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 < 0$$

$\therefore k'' = \dfrac{d^2k}{dh_1^2} = \dfrac{nm^2 - rm^2 - mnr}{nr} = \dfrac{m}{nr}\left(nm - rm - nr\right) < 0$ นั่นคือ

k มีค่าสูงสุด

พิจารณา

$$k' = \frac{dk}{dh_1} = \frac{1}{2nr}\left(2\left(nm^2 - rm^2 - mnr\right)h_1 + \left(2mnrh - 2m^2nh + 2mpr\right)\right) = 0$$

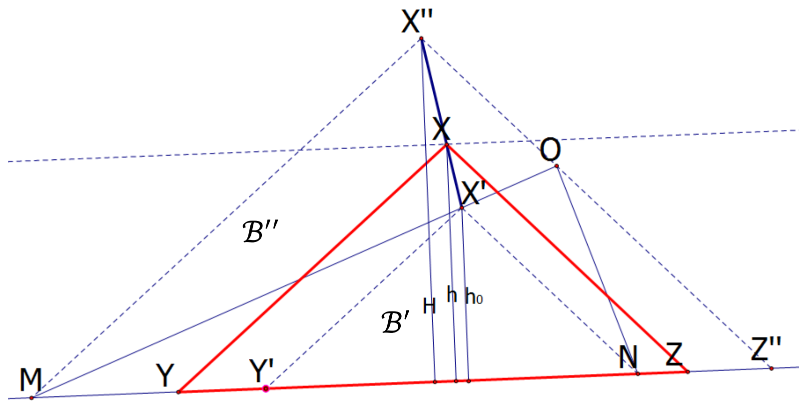
จะได้ว่า $h_1 = \dfrac{mnh - rp - nrh}{mn - rm - nr}$ เป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ k มีค่าสูงสุด นั่นคือพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด

เมื่อ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2, r = \cot\theta_1 + \cot\theta_2$

และ $p = MN - PQ$

ต่อไปจะแสดงว่าตำแหน่งดังกล่าวเป็นตำแหน่งเดียวกับสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$

สร้างรูปตามกระบวนการ 1 ดังภาพ



ภาพที่ 4.2.36 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.1 รูปที่ 5

โดยให้ $\mathcal{B}'$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น h_0

และ $\mathcal{B}''$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น H

และ $\mathcal{A}$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น H'

จะได้ว่า $p_{\mathcal{B}} = MN - YZ = H'\left(\cot\theta_1 + \cot\alpha_2\right) - h\left(\cot\alpha_1 + \cot\theta_2\right)$

$= H'\left(r - n\right) - h(r - m)$

จะแสดงว่า $\mathcal{B}''$ กับ $\mathcal{B}'$ สอดคล้องกับตำแหน่งที่หาข้างต้น

สังเกตว่า $p_{\mathcal{B}'} = MN - Y'N = MY' = mh_0$

จาก $h_1 = \dfrac{mnh - rp - nrh}{mn - rm - nr}$ จะได้ว่า $h_{1_{\mathcal{B}'}} = \dfrac{mnh_0 - rmh_0 - nrh_0}{mn - rm - nr} = h_0$

แสดงว่าจุดตัดของ $\overline{X'Y'}$ กับ $\overline{MO}$ คือจุด X' นั่นเอง

นั่นคือ $\mathcal{B}'$ สอดคล้องกับตำแหน่งที่หาข้างต้น

และจาก $p_{\mathcal{B}'} = H'\left(r - n\right) - h_0(r - m)$

$$\therefore mh_0 = H'\left(r-n\right) - h_0(r-m)$$

$$h_0 = \frac{H'(r-n)}{r}$$

สังเกตว่า $p_{\mathcal{B}'} = MN - MZ''$

$$= H'\left(\cot\theta_1 + \cot\alpha_2\right) - H'\left(\cot\theta_1 + \cot\theta_2\right)$$

$$= H'\left(r-n\right) - rH' = -nH'$$

แต่ $p_{\mathcal{B}'} = H'\left(r-n\right) - H(r-m)$

$$\therefore H'\left(r-n\right) - H\left(r-m\right) = -nH'$$

$$rH' = H\left(r-m\right)$$

$$H' = \frac{H(r-m)}{r}$$

จาก $h_1 = \dfrac{mnh - rp - nrh}{mn - rm - nr}$ จะได้ว่า

$$h_{1_{\mathcal{B}''}} = \frac{mnH + rnH' - nrH}{mn - rm - nr} = \frac{mnH + nH(r-m) - nrH}{mn - rm - nr} = 0$$

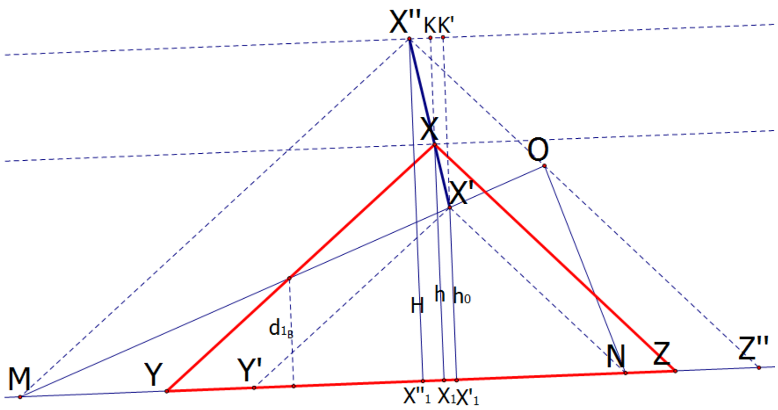
แสดงว่าจุดตัดของ $\overline{X''Y''}$ กับ $\overline{MO}$ คือจุด Y'' นั่นเอง
นั่นคือ $\mathcal{B}''$ เป็นตำแหน่งที่สอดคล้องกับตำแหน่งที่หาข้างต้น

และจะได้ว่า $H = \dfrac{rH'}{r-m}$

ให้ $d_{1_{\mathcal{B}}}$ แทนระยะตั้งฉากจากจุดตัด $\overline{XY}$ กับ $\overline{MO}$ ไปยังด้านร่วม

จะแสดงว่า $d_{1_{\mathcal{B}}} = h_{1_{\mathcal{B}}}$

ขั้นแรกจะแสดงว่า $d_{1_{\mathcal{B}}} = \dfrac{h_0(H-h)}{H-h_0}$



ภาพที่ 4.2.37 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.1 รูปที่ 6

จาก X, X' และ X'' ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าว ที่ X_1, X_1' และ X_1'' ตามลำดับ

สังเกตว่า

$$md_{1_B} = MY = MX_1' - YX_1 - X_1X_1' = h_0 \cot\theta_1 - h\cot\alpha_1 - X_1X_1'$$

สังเกตว่า

$$X_1''X_1' = MX_1' - MX_1'' = h_0\cot\theta_1 - H\cot\alpha_1$$

จะหา X_1X_1' โดยลากเส้นขนานด้านร่วมผ่าน X'' ดังภาพ

จาก X และ X' ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าว ที่ K, K' ตามลำดับ

สังเกตว่า $X_1X_1' = KK'$

และได้ว่า $\triangle X'K'X'' \sim \triangle XKX''$ ดังนั้น $\dfrac{X''K}{X''K'} = \dfrac{XK}{X'K'} = \dfrac{H-h}{H-h_0}$

แต่ $X''K' = X_1''X_1' = h_0\cot\theta_1 - H\cot\alpha_1$

$$\therefore X''K = \left(h_0\cot\theta_1 - H\cot\alpha_1\right)\left(\frac{H-h}{H-h_0}\right)$$

$$X_1X_1' = KK' = X''K' - X''K = \left(h_0\cot\theta_1 - H\cot\alpha_1\right)\left(\frac{h-h_0}{H-h_0}\right)$$

จึงได้ว่า $md_{1_B} = h_0 \cot\theta_1 - h\cot\alpha_1 - \left(h_0 \cot\theta_1 - H\cot\alpha_1\right)\left(\dfrac{h-h_0}{H-h_0}\right)$

$$md_{1_B} = h_0 \cot\theta_1\left(1-\frac{h-h_0}{H-h_0}\right) - \cot\alpha_1\left(h - H\left(\frac{h-h_0}{H-h_0}\right)\right)$$

$$md_{1_B} = h_0 \cot\theta_1\left(\frac{H-h}{H-h_0}\right) - \cot\alpha_1\left(\frac{hH - hh_0 - Hh + Hh_0}{H-h_0}\right)$$

$$md_{1_B} = h_0 \cot\theta_1\left(\frac{H-h}{H-h_0}\right) - h_0\cot\alpha_1\left(\frac{H-h}{H-h_0}\right)$$

$$md_{1_B} = h_0\left(\frac{H-h}{H-h_0}\right)\left(\cot\theta_1 - \cot\alpha_1\right)$$

$$md_{1_B} = mh_0\left(\frac{H-h}{H-h_0}\right)$$

ดังนั้น $d_{1_B} = \dfrac{h_0(H-h)}{H-h_0}$

จาก $h_0 = \dfrac{H'(r-n)}{r}$ และ $H = \dfrac{rH'}{r-m}$ ได้ว่า

$$H - h_0 = H'\left(\frac{r^2-\left(r-n\right)\left(r-m\right)}{r\left(r-m\right)}\right)$$

$$H - h_0 = H'\left(\frac{mn - rm - nr}{r(m-r)}\right)$$

$$d_{1_B} = \frac{r\left(m-r\right)h_0\left(H-h\right)}{H'\left(mn-rm-nr\right)} = \frac{\left(m-r\right)\left(r-n\right)\left(H-h\right)}{mn-rm-nr}$$

$$d_{1_B} = \frac{-r\left(r-n\right)H' + \left(r-m\right)\left(r-n\right)h}{mn-rm-nr}$$

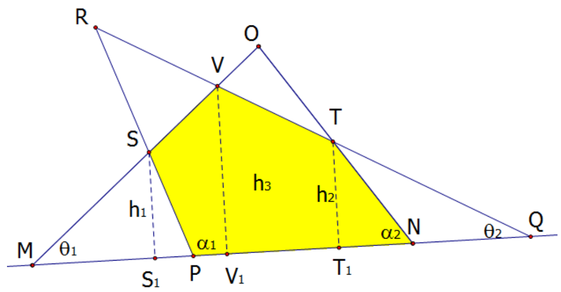
$$d_{1_B} = \frac{-r\left(r-n\right)H' + r\left(r-m\right)h - n\left(r-m\right)h}{mn-rm-nr}$$

$$d_{1_B} = \frac{-rp - rnh + nmh}{mn-rm-nr} = \frac{mnh - rp - nrh}{mn-rm-nr} = h_{1_B}$$

นั่นคือสามเหลี่ยมที่สร้างตามกระบวนการนั้นเป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด

กรณีที่ 2.2 $O\hat{N}M, O\hat{M}N, R\hat{Q}P \le 90°, R\hat{P}Q \ge 90°$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่าว่าตำแหน่งของ $\mathcal{A}$ ที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับสูงสุดจะอยู่ในช่วงตั้งแต่จุด N ตรงกับจุด Q จนถึงจุด O อยู่บนเส้นตรง $\overline{QR}$ ต่อไปจะหาตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับนั่นคือพื้นที่สีเหลืองในภาพมีค่ามากที่สุด



ภาพที่ 4.2.38 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.2 รูปที่ 1

กำหนดให้ $\overline{MO}$ ตัดกับ $\overline{PR}$ ที่ S $\overline{MO}, \overline{NO}$ ตัดกับ $\overline{QR}$ ที่ V, T ดังภาพ จาก S, T, V และ R ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับ $\overline{MN}$ ที่ S_1, T_1, V_1, R_1 มีความยาว h_1, h_2, h_3, h ตามลำดับ

กำหนดให้ $O\hat{M}N = \theta_1,\ O\hat{N}M = \alpha_2, R\hat{P}Q = \alpha_1, R\hat{Q}P = \theta_2$

กำหนดให้ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2$

และ $r = \cot\theta_1 + \cot\theta_2$

และ $p = MN - PQ = \left(MP + PN\right) - (PN + QN) = MP - QN$

เนื่องจาก MN, PQ เป็นความยาวฐานของสามเหลี่ยมทั้งสอง ดังนั้น p เป็นค่าคงที่เสมอทุกตำแหน่งของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และจากตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$\begin{aligned} MP = MS_1 + S_1\mathrm{P} &= \cot\theta_1 h_1 + \cot\left(180° - \alpha_1\right)h_1 \\ &= \cot\theta_1 h_1 - \cot\alpha_1 h_1 = mh_1 \end{aligned}$$

และ

$$QN = QT_1 - NT_1 = \cot\theta_2 h_2 - \cot\alpha_2 h_2 = nh_2$$
$$\therefore p = mh_1 - nh_2$$

จึงได้ว่า

$$h_2 = \frac{mh_1 - p}{n}$$

ต้องการหา $[PSVTN]$ ที่มากที่สุด

พิจารณา $\left[PSVTN\right]=\left[SS_1V_1V\right]+\left[V_1T_1TV\right]+\left[TT_1N\right]-\left[PSS_1\right]$

พิจารณา

$$\left[PSS_1\right]=\frac{1}{2}\left(PS_1\right)\left(h_1\right)=\frac{1}{2}h_1^2\cot\left(180^\circ-\alpha_1\right)=-\frac{1}{2}h_1^2\cot\alpha_1$$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า

$$\left[TT_1N\right]=\frac{1}{2}\left(QT_1\right)\left(h_2\right)=\frac{1}{2}h_2^2\cot\alpha_2$$

$$\left[SS_1V_1V\right]=\frac{1}{2}\left(h_3^2-h_1^2\right)\cot\theta_1$$

$$\left[V_1T_1TV\right]=\frac{1}{2}\left(h_3^2-h_2^2\right)\cot\theta_2$$

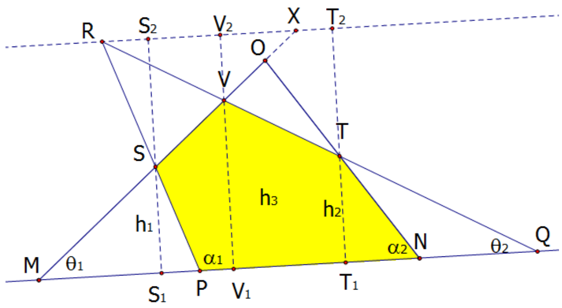
ดังนั้น

$$\begin{aligned}\left[PSVTN\right]&=-\left(-\frac{1}{2}h_1^2\cot\alpha_1\right)+\frac{1}{2}\left(h_3^2-h_1^2\right)\cot\theta_1\\&\quad+\frac{1}{2}\left(h_3^2-h_2^2\right)\cot\theta_2+\frac{1}{2}h_2^2\cot\alpha_2\\&=\frac{1}{2}h_1^2\left(\cot\alpha_1-\cot\theta_1\right)+\frac{1}{2}h_2^2\left(\cot\alpha_2-\cot\theta_2\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\left(\cot\theta_1+\cot\theta_2\right)h_3^2\\&=\frac{1}{2}\left(-m\right)h_1^2+\frac{1}{2}\left(-n\right)h_2^2+\frac{1}{2}rh_3^2\\&=\frac{1}{2}rh_3^2-\left(\frac{1}{2}mh_1^2+\frac{1}{2}nh_2^2\right)\end{aligned}$$

จาก $h_2=\dfrac{mh_1-p}{n}$ ให้ $l=\dfrac{1}{2}mh_1^2+\dfrac{1}{2}nh_2^2$ ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1

จะได้ว่า $l=\dfrac{1}{2n}\left(\left(m^2+mn\right)h_1^2-2pmh_1+p^2\right)$

ต่อไปจะหาค่า h_3 ในรูปตัวแปร h_1 และค่าคงที่ h,m,n,r



ภาพที่ 4.2.39 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.2 รูปที่ 2

สร้างเส้นขนานด้านร่วมผ่านจุด R ตัด $\overline{MO}$ หรือส่วนต่อที่ X จาก S,T,V ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าวที่ S_2,T_2,V_2

สังเกตว่า $h = h_1 + SS_2 = h_3 + VV_2$

และ $\triangle RSS_2 \sim \triangle PSS_1$ และ $\triangle RSX \sim \triangle PSM$ ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า

$$XR = m(h - h_1)$$

จากตรีโกณมิติ ได้ว่า $MQ = MV_1 + V_1Q = \cot\theta_1 h_3 + \cot\theta_2 h_3 = rh_3$

สังเกตว่า $\triangle RXV \sim \triangle MQV$ ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า

$$h = h_3 + \frac{XR}{r}$$

$$h_3 = h - \frac{XR}{r} = h - \frac{m\left(h - h_1\right)}{r} = \frac{hr - hm + mh_1}{r}$$

ด้วยวิธีการเดียวกับกรณีที่ 2.1 จะได้ว่า

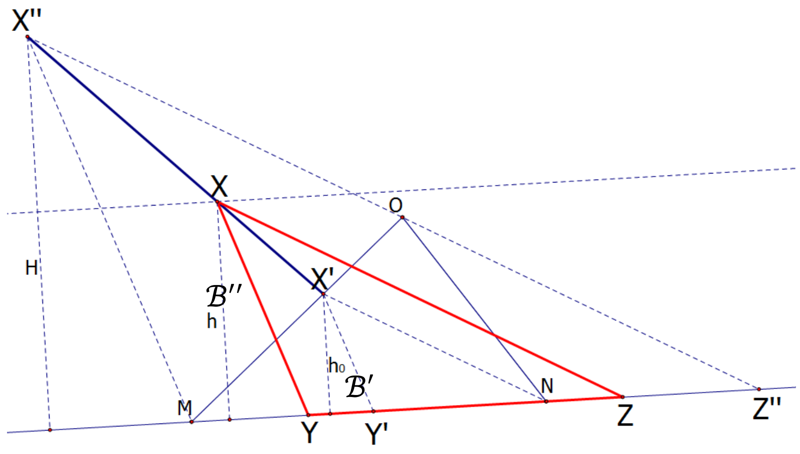
จะได้ว่า $h_1 = \dfrac{mnh - rp - nrh}{mn - rm - nr}$ เป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ k มีค่าสูงสุด นั่นคือพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด

เมื่อ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2, r = \cot\theta_1 + \cot\theta_2$

และ $p = MN - PQ$

ต่อไปจะแสดงว่าตำแหน่งดังกล่าวเป็นตำแหน่งเดียวกับสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$

สร้างรูปตามกระบวนการ 1 ดังภาพ



ภาพที่ 4.2.40 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.2 รูปที่ 3

โดยให้ $\mathcal{B}'$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น h_0

และ $\mathcal{B}''$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น H

และ $\mathcal{A}$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น H'

จะได้ว่า $p_{\mathcal{B}} = MN - YZ$

$$= H'\left(\cot\theta_1 + \cot\alpha_2\right) - h\left(-\cot\left(180^\circ - \alpha_1\right) + \cot\theta_2\right)$$

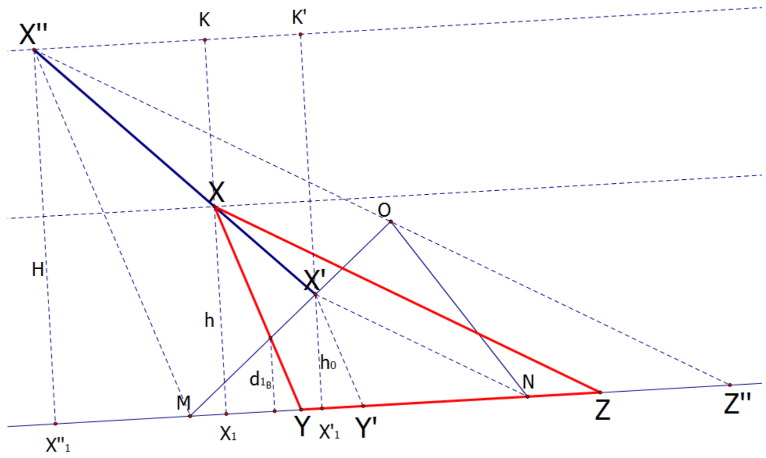
$$= H'\left(r - n\right) - h(r - m)$$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า $\mathcal{B}''$ กับ $\mathcal{B}'$ สอดคล้องกับตำแหน่งที่หาข้างต้น

ให้ $d_{1_{\mathcal{B}}}$ แทนระยะตั้งฉากจากจุดตัด $\overline{XY}$ กับ $\overline{MO}$ ไปยังด้านร่วม

จะแสดงว่า $d_{1_{\mathcal{B}}} = h_{1_{\mathcal{B}}}$

ขั้นแรกจะแสดงว่า $d_{1_{\mathcal{B}}} = \dfrac{h_0(H-h)}{H-h_0}$



ภาพที่ 4.2.41 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.2 รูปที่ 4

จาก X, X' และ X'' ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าว ที่ X_1, X_1' และ X_1'' ตามลำดับ

สังเกตว่า

$$\begin{aligned} md_{1_B} &= MY = MX_1' + YX_1 - X_1X_1' \\ &= h_0 \cot\theta_1 + h\cot\left(180^\circ - \alpha_1\right) - X_1X_1' \\ &= h_0 \cot\theta_1 - h\cot\alpha_1 - X_1X_1' \end{aligned}$$

สังเกตว่า

$$\begin{aligned} X_1''X_1' = MX_1' + MX_1'' &= h_0 \cot\theta_1 + H\cot\left(180^\circ - \alpha_1\right) \\ &= h_0 \cot\theta_1 - H\cot\alpha_1 \end{aligned}$$

จะหา X_1X_1' โดยลากเส้นขนานด้านร่วมผ่าน X'' ดังภาพ

จาก X และ X' ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าว ที่ K, K' ตามลำดับ

สังเกตว่า $X_1X_1' = KK'$

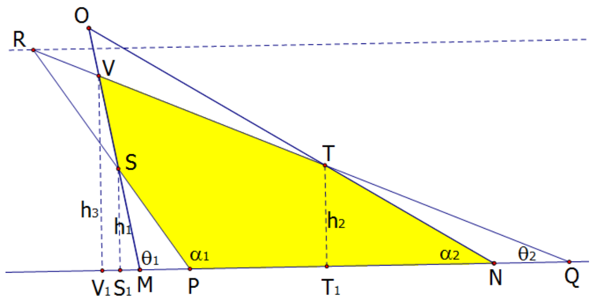
ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า $d_{1_B} = \dfrac{h_0(H-h)}{H-h_0}$ และได้ว่า $d_{1_B} = h_{1_B}$

นั่นคือสามเหลี่ยมที่สร้างตามกระบวนการนั้นเป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด

กรณีที่ 2.4 $O\hat{N}M, R\hat{Q}P \le 90^\circ, R\hat{P}Q, O\hat{M}N \ge 90^\circ$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่าว่าตำแหน่งของ $\mathcal{A}$ ที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับสูงสุดจะอยู่ในช่วงตั้งแต่จุด N ตรงกับจุด Q จนถึงจุด O อยู่บนเส้นตรง $\overline{QR}$

ต่อไปจะหาตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับนั่นคือพื้นที่สีเหลืองในภาพมีค่ามากที่สุด



ภาพที่ 4.2.42 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.4 รูปที่ 1

กำหนดให้ $\overline{MO}$ ตัดกับ $\overline{PR}$ ที่ S $\overline{MO},\overline{NO}$ ตัดกับ $\overline{QR}$ ที่ V,T ดังภาพ จาก S,T,V และ R ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับ $\overline{MN}$ ที่ S_1,T_1,V_1,R_1 มีความยาว h_1,h_2,h_3,h ตามลำดับ

กำหนดให้ $O\hat{M}N=\theta_1,\ O\hat{N}M=\alpha_2,R\hat{P}Q=\alpha_1,R\hat{Q}P=\theta_2$

กำหนดให้ $m=\cot\theta_1-\cot\alpha_1,n=\cot\theta_2-\cot\alpha_2$

และ $r=\cot\theta_1+\cot\theta_2$

และ $p=MN-PQ=\left(MP+PN\right)-(PN+QN)=MP-QN$

เนื่องจาก MN,PQ เป็นความยาวฐานของสามเหลี่ยมทั้งสอง ดังนั้น p เป็นค่าคงที่เสมอทุกตำแหน่งของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และจากตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$\begin{aligned} MP=S_1P-MS_1 &= \cot\left(180^\circ-\alpha_1\right)h_1-\cot\left(180^\circ-\theta_1\right)h_1 \\ &= \cot\theta_1 h_1-\cot\alpha_1 h_1=mh_1 \end{aligned}$$

และ

$$QN=QT_1-NT_1=\cot\theta_2 h_2-\cot\alpha_2 h_2=nh_2$$
$$\therefore p=mh_1-nh_2$$

จึงได้ว่า

$$h_2=\frac{mh_1-p}{n}$$

ต้องการหา $[PSVTN]$ ที่มากที่สุด

พิจารณา $\left[PSVTN\right]=\left[V_1T_1TV\right]+\left[TT_1N\right]-\left[PSS_1\right]-\left[SS_1V_1V\right]$

พิจารณา $\left[PSS_1\right]=\frac{1}{2}\left(PS_1\right)\left(h_1\right)=\frac{1}{2}h_1^2\cot\left(180^\circ-\alpha_1\right)=-\frac{1}{2}h_1^2\cot\alpha_1$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า

$$\left[TT_1N\right]=\frac{1}{2}\left(QT_1\right)\left(h_2\right)=\frac{1}{2}h_2^2\cot\alpha_2$$
$$\left[V_1T_1TV\right]=\frac{1}{2}\left(h_3^2-h_2^2\right)\cot\theta_2$$

พิจารณา $\left[SS_1V_1V\right]=\frac{1}{2}\left(S_1V_1\right)\left(h_1+h_3\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(h_3 \cot\left(180^\circ - \theta_1\right) - h_1 \cot\left(180^\circ - \theta_1\right)\right)\left(h_1 + h_3\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(h_3^2 - h_1^2\right)\cot\left(180^\circ - \theta_1\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(h_3^2 - h_1^2\right)\cot\theta_1$$

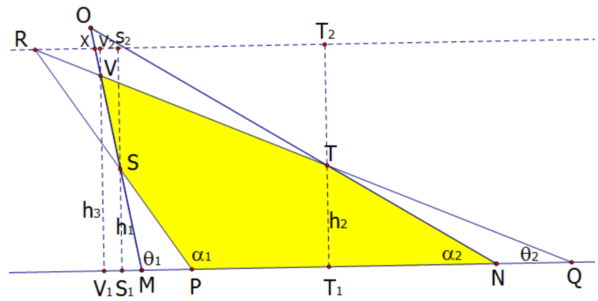
ดังนั้น

$$\left[PSVTN\right] = -\left(-\frac{1}{2}h_1^2 \cot\alpha_1\right) - \left(-\frac{1}{2}\left(h_3^2 - h_1^2\right)\cot\theta_1\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(h_3^2 - h_2^2\right)\cot\theta_2 + \frac{1}{2}h_2^2 \cot\alpha_2$$
$$= \frac{1}{2}h_1^2\left(\cot\alpha_1 - \cot\theta_1\right) + \frac{1}{2}h_2^2\left(\cot\alpha_2 - \cot\theta_2\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\cot\theta_1 + \cot\theta_2\right)h_3^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(-m\right)h_1^2 + \frac{1}{2}\left(-n\right)h_2^2 + \frac{1}{2}rh_3^2$$
$$= \frac{1}{2}rh_3^2 - \left(\frac{1}{2}mh_1^2 + \frac{1}{2}nh_2^2\right)$$

จาก $h_2 = \dfrac{mh_1 - p}{n}$ ให้ $l = \frac{1}{2}mh_1^2 + \frac{1}{2}nh_2^2$ ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1

จะได้ว่า $l = \dfrac{1}{2n}\left(\left(m^2 + mn\right)h_1^2 - 2pmh_1 + p^2\right)$

ต่อไปจะหาค่า h_3 ในรูปตัวแปร h_1 และค่าคงที่ h, m, n, r



ภาพที่ 4.2.43 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.4 รูปที่ 2

สร้างเส้นขนานด้านร่วมผ่านจุด R ตัด $\overline{MO}$ หรือส่วนต่อที่ X จาก S,T,V ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าวที่ S_2, T_2, V_2

สังเกตว่า $h = h_1 + SS_2 = h_3 + VV_2$

และ $\triangle RSS_2 \sim \triangle PSS_1$ และ $\triangle RSX \sim \triangle PSM$ ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า

$$XR = m(h - h_1)$$

จากตรีโกณมิติ ได้ว่า $MQ = V_1Q - MV_1 = \cot\theta_2 h_3 - \cot\left(180^\circ - \theta_1\right)h_3$

$$= \cot\theta_2 h_3 + \cot\theta_1 h_3 = rh_3$$

สังเกตว่า $\triangle RXV \sim \triangle MQV$ ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า

$$h = h_3 + \frac{XR}{r}$$

$$h_3 = h - \frac{XR}{r} = h - \frac{m\left(h - h_1\right)}{r} = \frac{hr - hm + mh_1}{r}$$

ด้วยวิธีการเดียวกับกรณีที่ 2.1 จะได้ว่า

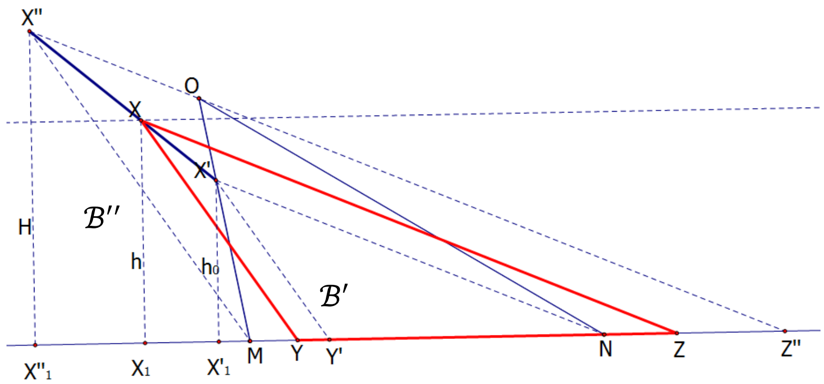
จะได้ว่า $h_1 = \dfrac{mnh - rp - nrh}{mn - rm - nr}$ เป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ k มีค่าสูงสุด นั่นคือพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด

เมื่อ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2, r = \cot\theta_1 + \cot\theta_2$

และ $p = MN - PQ$

ต่อไปจะแสดงว่าตำแหน่งดังกล่าวเป็นตำแหน่งเดียวกับสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$

สร้างรูปตามกระบวนการ 1 ดังภาพ



ภาพที่ 4.2.44 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.4 รูปที่ 3

โดยให้ $\mathcal{B}'$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น h_0

และ $\mathcal{B}''$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น H

และ $\mathcal{A}$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น H'

จะได้ว่า $p_{\mathcal{B}} = MN - YZ$

$$= H'\left(-\cot\left(180^\circ - \theta_1\right) + \cot\alpha_2\right) - h\left(-\cot\left(180^\circ - \alpha_1\right) + \cot\theta_2\right)$$

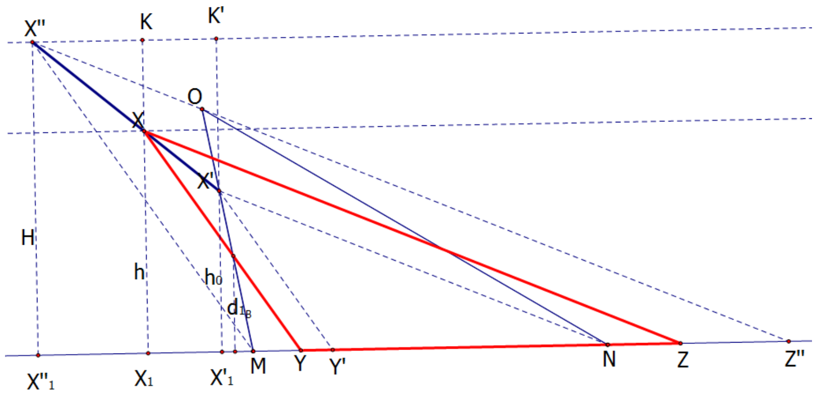
$$= H'\left(r - n\right) - h(r - m)$$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า $\mathcal{B}''$ กับ $\mathcal{B}'$ สอดคล้องกับตำแหน่งที่หาข้างต้น

ให้ $d_{1_{\mathcal{B}}}$ แทนระยะตั้งฉากจากจุดตัด $\overline{XY}$ กับ $\overline{MO}$ ไปยังด้านร่วม

จะแสดงว่า $d_{1_{\mathcal{B}}} = h_{1_{\mathcal{B}}}$

ขั้นแรกจะแสดงว่า $d_{1_{\mathcal{B}}} = \dfrac{h_0(H-h)}{H-h_0}$



ภาพที่ 4.2.45 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.4 รูปที่ 4

จาก X, X' และ X'' ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าว ที่ X_1, X_1' และ X_1'' ตามลำดับ

สังเกตว่า

$$md_{1_{\mathcal{B}}} = MY = YX_1 - MX_1' - X_1X_1'$$
$$= h\cot\left(180^\circ - \alpha_1\right) - h_0\cot\left(180^\circ - \theta_1\right) - X_1X_1'$$
$$= h_0\cot\theta_1 - h\cot\alpha_1 - X_1X_1'$$

สังเกตว่า

$$X_1''X_1' = MX_1'' - MX_1' = H\cot\left(180^\circ - \alpha_1\right) - h_0\cot\left(180^\circ - \theta_1\right)$$

$$= h_0 \cot\theta_1 - H\cot\alpha_1$$

จะหา X_1X_1' โดยลากเส้นขนานด้านร่วมผ่าน X'' ดังภาพ

จาก X และ X' ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าว ที่ K, K' ตามลำดับ

สังเกตว่า $X_1X_1' = KK'$

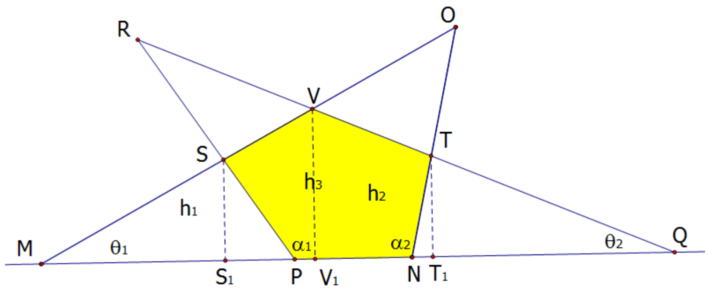
ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า $d_{1_B} = \dfrac{h_0(H-h)}{H-h_0}$ และได้ว่า $d_{1_B} = h_{1_B}$

นั่นคือสามเหลี่ยมที่สร้างตามกระบวนการนั้นเป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด

กรณีที่ 2.6 $O\hat{N}M, R\hat{P}Q \geq 90°, R\hat{Q}P, O\hat{M}N \leq 90°$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่าว่าตำแหน่งของ $\mathcal{A}$ ที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับสูงสุดจะอยู่ในช่วงตั้งแต่จุด N ตรงกับจุด Q จนถึงจุด O อยู่บนเส้นตรง $\overline{QR}$

ต่อไปจะหาตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับนั่นคือพื้นที่สีเหลืองในภาพมีค่ามากที่สุด



ภาพที่ 4.2.46 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.6 รูปที่ 1

กำหนดให้ $\overline{MO}$ ตัดกับ $\overline{PR}$ ที่ S $\overline{MO}, \overline{NO}$ ตัดกับ $\overline{QR}$ ที่ V, T ดังภาพ

จาก S, T, V และ R ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับ $\overline{MN}$ ที่ S_1, T_1, V_1, R_1 มีความยาว h_1, h_2, h_3, h ตามลำดับ

กำหนดให้ $O\hat{M}N = \theta_1,\ O\hat{N}M = \alpha_2, R\hat{P}Q = \alpha_1, R\hat{Q}P = \theta_2$

กำหนดให้ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2$

และ $r = \cot\theta_1 + \cot\theta_2$

และ $p = MN - PQ = \left(MP + PN\right) - (PN + QN) = MP - QN$

เนื่องจาก MN, PQ เป็นความยาวฐานของสามเหลี่ยมทั้งสอง ดังนั้น p เป็นค่าคงที่เสมอทุกตำแหน่งของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และจากตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$\begin{aligned} MP = MS_1 + S_1\mathrm{P} &= \cot\theta_1 h_1 + \cot\left(180^\circ - \alpha_1\right)h_1 \\ &= \cot\theta_1 h_1 - \cot\alpha_1 h_1 = mh_1 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} QN = QT_1 + T_1N &= \cot\theta_2 h_2 + \cot\left(180^\circ - \alpha_2\right)h_2 = nh_2 \\ &= \cot\theta_2 h_2 - \cot\alpha_2 h_2 = nh_2 \\ &\therefore p = mh_1 - nh_2 \end{aligned}$$

จึงได้ว่า

$$h_2 = \frac{mh_1 - p}{n}$$

ต้องการหา $[PSVTN]$ ที่มากที่สุด

พิจารณา $\left[PSVTN\right] = \left[SS_1V_1V\right] + \left[V_1T_1TV\right] - \left[TT_1N\right] - \left[PSS_1\right]$

พิจารณา

$$\left[PSS_1\right] = \frac{1}{2}\left(PS_1\right)\left(h_1\right) = \frac{1}{2}h_1^2\cot\left(180^\circ - \alpha_1\right) = -\frac{1}{2}h_1^2\cot\alpha_1$$

$$\left[TT_1N\right] = \frac{1}{2}\left(QT_1\right)\left(h_2\right) = \frac{1}{2}h_2^2\cot\left(180^\circ - \alpha_2\right) = -\frac{1}{2}h_2^2\cot\alpha_2$$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า

$$\left[SS_1V_1V\right] = \frac{1}{2}\left(h_3^2 - h_1^2\right)\cot\theta_1$$

$$\left[V_1T_1TV\right] = \frac{1}{2}\left(h_3^2 - h_2^2\right)\cot\theta_2$$

ดังนั้น

$$\left[PSVTN\right] = -\left(-\frac{1}{2}h_1^2\cot\alpha_1\right) + \frac{1}{2}\left(h_3^2 - h_1^2\right)\cot\theta_1$$

$$+\frac{1}{2}\left(h_3^2-h_2^2\right)\cot\theta_2-\left(-\frac{1}{2}h_2^2\cot\alpha_2\right)$$

$$=\frac{1}{2}h_1^2\left(\cot\alpha_1-\cot\theta_1\right)+\frac{1}{2}h_2^2\left(\cot\alpha_2-\cot\theta_2\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cot\theta_1+\cot\theta_2\right)h_3^2$$

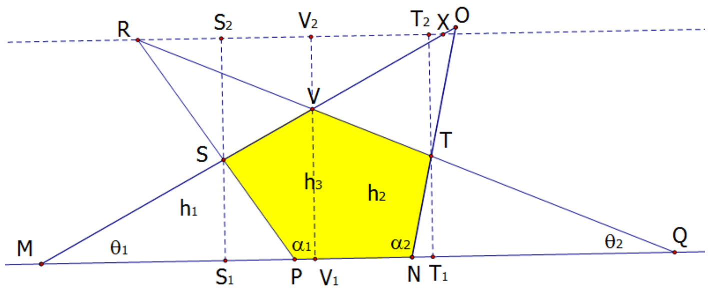
$$=\frac{1}{2}\left(-m\right)h_1^2+\frac{1}{2}\left(-n\right)h_2^2+\frac{1}{2}rh_3^2$$

$$=\frac{1}{2}rh_3^2-\left(\frac{1}{2}mh_1^2+\frac{1}{2}nh_2^2\right)$$

จาก $h_2=\dfrac{mh_1-p}{n}$ ให้ $l=\dfrac{1}{2}mh_1^2+\dfrac{1}{2}nh_2^2$ ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1

จะได้ว่า $l=\dfrac{1}{2n}\left(\left(m^2+mn\right)h_1^2-2pmh_1+p^2\right)$

ต่อไปจะหาค่า h_3 ในรูปตัวแปร h_1 และค่าคงที่ h,m,n,r



ภาพที่ 4.2.47 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.6 รูปที่ 2

สร้างเส้นขนานด้านร่วมผ่านจุด R ตัด $\overline{MO}$ หรือส่วนต่อที่ X จาก S,T,V ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าวที่ S_2,T_2,V_2

สังเกตว่า $h=h_1+SS_2=h_3+VV_2$

และ $\triangle RSS_2\sim\triangle PSS_1$ และ $\triangle RSX\sim\triangle PSM$ ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า

$$XR=m(h-h_1)$$

จากตรีโกณมิติ ได้ว่า $MQ=MV_1+V_1Q=\cot\theta_1h_3+\cot\theta_2h_3=rh_3$

สังเกตว่า $\triangle RXV\sim\triangle MQV$ ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า

$$h = h_3 + \frac{XR}{r}$$

$$h_3 = h - \frac{XR}{r} = h - \frac{m\left(h - h_1\right)}{r} = \frac{hr - hm + mh_1}{r}$$

ด้วยวิธีการเดียวกับกรณีที่ 2.1 จะได้ว่า

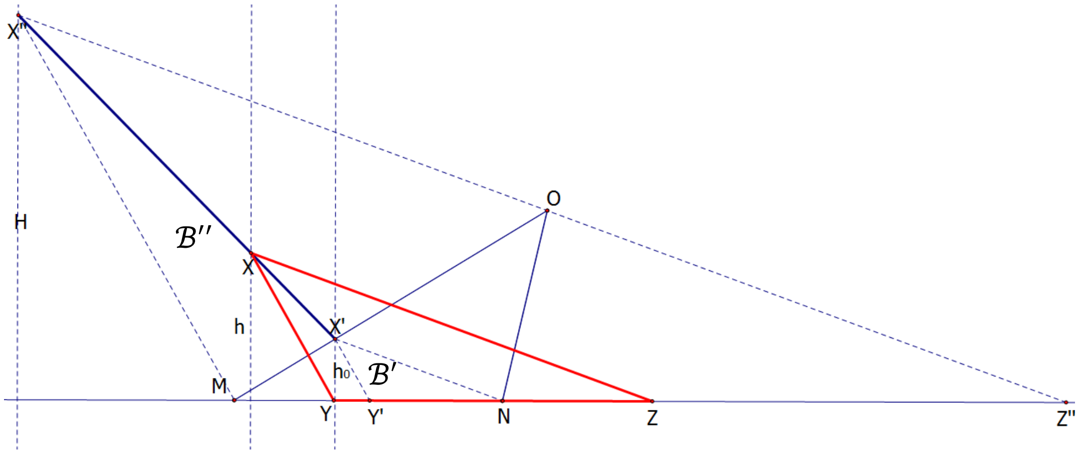
จะได้ว่า $h_1 = \dfrac{mnh - rp - nrh}{mn - rm - nr}$ เป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ k มีค่าสูงสุด นั่นคือพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด

เมื่อ $m = \cot\theta_1 - \cot\alpha_1, n = \cot\theta_2 - \cot\alpha_2, r = \cot\theta_1 + \cot\theta_2$

และ $p = MN - PQ$

ต่อไปจะแสดงว่าตำแหน่งดังกล่าวเป็นตำแหน่งเดียวกับสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$

สร้างรูปตามกระบวนการ 1 ดังภาพ



ภาพที่ 4.2.48 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.6 รูปที่ 3

โดยให้ $\mathcal{B}'$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น h_0

และ $\mathcal{B}''$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น H

และ $\mathcal{A}$ มีความสูงที่ตั้งฉากกับด้านร่วมเป็น H'

จะได้ว่า $p_{\mathcal{B}} = MN - YZ$

$$= H'\left(\cot\theta_1 - \cot\left(180^\circ - \alpha_2\right)\right) - h\left(-\cot\left(180^\circ - \alpha_1\right) + \cot\theta_2\right)$$

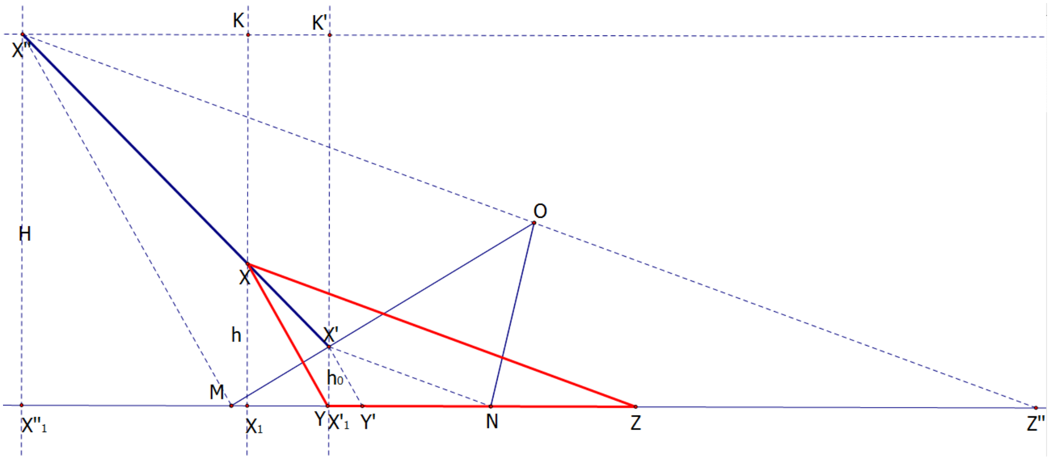
$$= H'\left(r - n\right) - h(r - m)$$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า $\mathcal{B}''$ กับ $\mathcal{B}'$ สอดคล้องกับตำแหน่งที่หาข้างต้น

ให้ $d_{1_{\mathcal{B}}}$ แทนระยะตั้งฉากจากจุดตัด $\overline{XY}$ กับ $\overline{MO}$ ไปยังด้านร่วม

จะแสดงว่า $d_{1_{\mathcal{B}}} = h_{1_{\mathcal{B}}}$

ขั้นแรกจะแสดงว่า $d_{1_B} = \dfrac{h_0(H-h)}{H-h_0}$



ภาพที่ 4.2.49 รูปประกอบบทพิสูจน์กระบวนการ 4.2.1 กรณีที่ 2.6 รูปที่ 4

จาก X, X' และ X'' ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าว ที่ X_1, X_1' และ X_1'' ตามลำดับ

สังเกตว่า

$$\begin{aligned} md_{1_B} &= MY = MX_1' + YX_1 - X_1X_1' \\ &= h_0 \cot\theta_1 + h\cot\left(180^\circ - \alpha_1\right) - X_1X_1' \\ &= h_0 \cot\theta_1 - h\cot\alpha_1 - X_1X_1' \end{aligned}$$

สังเกตว่า

$$\begin{aligned} X_1''X_1' = MX_1' + MX_1'' &= h_0 \cot\theta_1 + H\cot\left(180^\circ - \alpha_1\right) \\ &= h_0 \cot\theta_1 - H\cot\alpha_1 \end{aligned}$$

จะหา X_1X_1' โดยลากเส้นขนานด้านร่วมผ่าน X'' ดังภาพ

จาก X และ X' ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับเส้นขนานดังกล่าว ที่ K, K' ตามลำดับ

สังเกตว่า $X_1X_1' = KK'$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2.1 ได้ว่า $d_{1_B} = \dfrac{h_0(H-h)}{H-h_0}$ และได้ว่า $d_{1_B} = h_{1_B}$

นั่นคือสามเหลี่ยมที่สร้างตามกระบวนการนั้นเป็นตำแหน่งที่ทำให้พื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุด □

จากกระบวนการข้างต้นจะสามารถหาตำแหน่งที่ทำให้สามเหลี่ยมสองรูปมีพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุดเมื่อมีด้านที่กำหนดให้ร่วมกันได้เมื่อรู้คุณสมบัติของสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยหากพิจารณาคู่ด้านทุกคู่ก็จะสามารถหาตำแหน่งที่ทำให้มีพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุดของสามเหลี่ยมสองรูปเมื่อมีด้านร่วมกันด้านหนึ่งได้

บทแทรก 4.2.1

สามเหลี่ยม MNO *และ* PQR *แทนด้วย* $\mathcal{A}$ *และ* $\mathcal{B}$ *ตามลำดับเป็นสามเหลี่ยมใดๆซึ่งซ้อนทับกันไม่สนิทและมีด้านร่วมกัน 1 ด้าน โดยที่ด้าน* $\overline{MN}$ *เป็นด้านร่วมกับ* $\overline{PQ}$ *และ* M *อยู่ใกล้* P *มากกว่า* N *และให้สามเหลี่ยม* $M'N'O' \sim MNO$ *แทนด้วย* $\mathcal{C}$ จะได้ว่า

- *ตำแหน่งของจุดยอดที่ไม่อยู่บนด้านร่วมที่ทำให้* $\mathcal{A}$ *และ* $\mathcal{B}$ *มีพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุดเมื่อมีด้าน* $\overline{MN}$ *เป็นด้านร่วมกับ* $\overline{PQ}$
- *ตำแหน่งของจุดยอดที่ไม่อยู่บนด้านร่วมที่ทำให้* $\mathcal{C}$ *และ* $\mathcal{B}$ *มีพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุดเมื่อมีด้าน* $\overline{M'N'}$ *เป็นด้านร่วมกับ* $\overline{PQ}$
- *จุดยอดที่ไม่อยู่บนด้านร่วมของสามเหลี่ยม* $\mathcal{A}'$
- *จุดยอดที่ไม่อยู่บนด้านร่วมของสามเหลี่ยม* $\mathcal{A}''$

อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

บทพิสูจน์ บทตั้งที่ 4.2.2 และ 4.2.3 สังเกตได้ว่าสามเหลี่ยม $\mathcal{C}'$ เป็นรูปเดียวกับ $\mathcal{A}'$ และสามเหลี่ยม $\mathcal{C}''$ เป็นรูปเดียวกับ $\mathcal{A}''$ ดังนั้นเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดตามกระบวนการ 4.2.1 ของทั้ง $\mathcal{A}'$ และ $\mathcal{C}$ จึงเป็นเส้นเดียวกัน เนื่องจากตำแหน่งของจุดยอดที่ไม่อยู่บนด้านร่วมที่ทำให้ $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$ มีพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุดเมื่อมีด้าน $\overline{MN}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$ และ ตำแหน่งของจุดยอดที่ไม่อยู่บนด้านร่วมที่ทำให้ $\mathcal{C}$ และพื้นที่ซ้อนทับกันมากที่สุดเมื่อมีด้าน $\overline{M'N'}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$ อยู่บนเส้นตรงดังกล่าวทั้งคู่จึงได้ว่าบทแทรกนี้เป็นจริง □

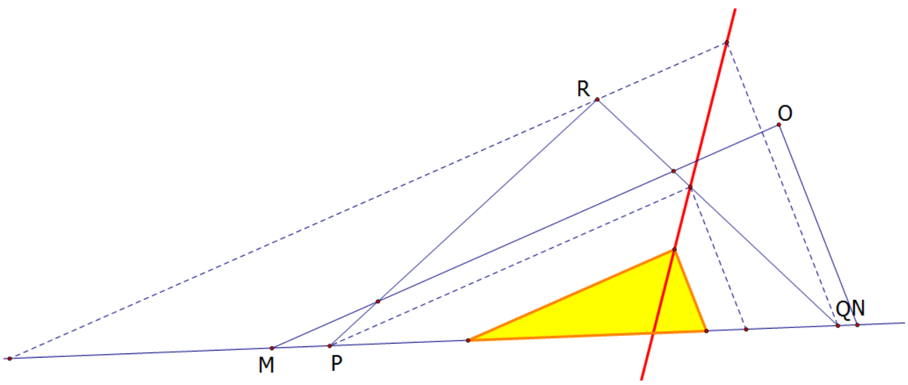
บทแทรก 4.2.2

สามเหลี่ยม MNO *และ* PQR *แทนด้วย* $\mathcal{A}$ *และ* $\mathcal{B}$ *ตามลำดับเป็นสามเหลี่ยมใดๆซึ่งซ้อนทับกันไม่สนิทและมีด้านร่วมกัน 1 ด้าน โดยที่ด้าน* $\overline{\mathbf{MN}}$ *โดยที่ด้าน* $\overline{MN}$ *เป็นด้านร่วมกับ* $\overline{PQ}$ *และ* M *อยู่ใกล้* P *มากกว่า* N *ได้ว่าทุกจุดบนเส้นตรงที่สร้างตามกระบวนการที่ 2.1 จะเป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมที่คล้ายกับ* $\mathcal{A}$ *และมีพื้นที่ซ้อนทับกับ* $\mathcal{B}$ *เมื่อมีด้านที่กำหนดร่วมกันมากที่สุด*

บทพิสูจน์ ให้สามเหลี่ยม $M'N'O' \sim MNO$ *แทนด้วย* $\mathcal{C}$

จากบทแทรกที่ 2.1 สังเกตว่าบทแทรกนี้เป็นจริงเมื่อ $\mathcal{C}$ กับ $\mathcal{B}$ ซ้อนทับกันไม่สนิท ดังนั้นพิจารณาในกรณีที่ $\mathcal{C}$ กับ $\mathcal{B}$ ซ้อนทับกันสนิท

ในกรณีที่ $\mathcal{C}$ ถูก $\mathcal{B}$ ซ้อนทับได้สนิท จะได้ว่า $\mathcal{C}$ เล็กกว่า $\mathcal{A}'$ พิจารณาจุด W บนเส้นตรงดังกล่าวซึ่งมีระยะห่างถึงด้านร่วมเท่ากับส่วนสูงจากจุด M' ของ $\mathcal{C}$ จะได้ว่า W อยู่ในรูป $\mathcal{A}'$ จาก W ลากเส้นตรงขนาน $\overline{MO}$ และ $\overline{NO}$ ตัดด้านร่วมที่ H และ G ตามลำดับ จะได้ว่า $HGW \cong M'N'O'$ เป็นสามเหลี่ยมที่อยู่ใน $\mathcal{A}'$ ซึ่งอยู่ใน $\mathcal{B}$ และมีจุดยอดอยู่บนเส้นตรงจากกระบวนการ 2.1



ภาพที่ 4.2.50 รูปประกอบบทพิสูจน์บทแทรก 4.2.2

ด้วยวิธีคล้ายๆกันจะสามารถพิสูจน์สำหรับกรณีที่ $\mathcal{B}$ ถูก $\mathcal{C}$ ซ้อนทับได้สนิทได้เช่นกัน □

บทที่ 5
สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง

จากการแบ่งกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการจัดเรียงรูปสามเหลี่ยมสองรูปให้ซ้อนทับกัน พบว่า เกือบทุกกรณีจะมีวิธีการเลื่อนขนานหรือหมุนรูปสามเหลี่ยมเพื่อเพิ่มพื้นที่ซ้อนทับ มีเพียงบางกรณีที่ยังไม่สามารถหาได้ โดย จะแบ่งออกได้เป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

1. สามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีด้านหนึ่งด้านที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
2. สามเหลี่ยมสองรูปเรียงตัวกันเป็นรูปดาว (Star-shaped) และกรณีอื่นๆ บางส่วน

ซึ่งสำหรับกรณีที่ 1 นั้นสามารถหากระบวนการในการหาตำแหน่งที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดเมื่อมีด้านที่กำหนดให้ร่วมกันได้ ดังแสดงในกระบวนการที่ 4.2.1 นั่นคือ

กระบวนการ 4.2.1

ให้รูป MNO และ PQR แทนด้วย $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$ ตามลำดับเป็นสามเหลี่ยมใดๆซึ่งซ้อนทับกันไม่สนิทและมีด้านร่วมกัน 1 ด้าน โดยที่ด้าน $\overline{MN}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$ และ M อยู่ใกล้ P มากกว่า N โดยมีเงื่อนไขดังนี้

- ถ้า $O\hat{M}N = R\hat{P}Q$ แล้ว $O\hat{N}M \neq R\hat{Q}P$
- ถ้า $O\hat{N}M = R\hat{Q}P$ แล้ว $O\hat{M}N \neq R\hat{P}Q$

จะมีกระบวนการหาตำแหน่งที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดดังนี้

1. สร้างสามเหลี่ยม $\mathcal{A}'$ และ $\mathcal{A}''$
2. ลากเส้นเชื่อมจุดยอดของ $\mathcal{A}'$ และ $\mathcal{A}''$ ที่ไม่ได้อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกันกับด้านร่วมของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{B}$
3. สร้างเส้นขนานด้านร่วมผ่านจุดยอดที่ไม่ได้อยู่บนด้านร่วมของ $\mathcal{A}$ ตัดกับส่วนเส้นตรงในข้อ 2 ที่จุด X
4. จากจุด X ลากเส้นขนานกับด้านของสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$ ตัดด้านร่วมที่ Y และ Z
5. จากบทสร้างทางเรขาคณิตจะเกิดรูป XYZ เรียกว่าสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ ซึ่งเท่ากันทุกประการกับสามเหลี่ยม $\mathcal{A}$
6. จะได้ว่าตำแหน่งของสามเหลี่ยม $\mathcal{C}$ จะมีพื้นที่ซ้อนทับกับ $\mathcal{B}$ มากที่สุดเมื่อมีด้าน $\overline{MN}$ เป็นด้านร่วมกับ $\overline{PQ}$

ปัญหาปลายเปิด

จากกระบวนการที่ 4.2.1 สังเกตว่าตำแหน่งที่มีพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดของสามเหลี่ยมสองรูป $\mathcal{A}$ *และ* $\mathcal{B}$ ที่มีด้านที่กำหนดให้ร่วมกัน มีความสัมพันธ์กับ $\mathcal{A}'$ รูปสามเหลี่ยมที่ใหญ่ที่สุดที่แนบใน $\mathcal{B}$ โดยมีด้านที่กำหนดร่วมกัน กับ $\mathcal{A}''$ รูปสามเหลี่ยมที่เล็กที่สุดที่ $\mathcal{B}$ แนบในได้โดยมีด้านที่กำหนดร่วมกัน ซึ่งสามเหลี่ยมทั้งสองทำให้เกิดการซ้อนทับพอดีนั่นคือพื้นที่ซ้อนทับมากสุดเช่นกัน ดังนั้นหากลองขยายทฤษฎีนี้ให้กว้างขึ้น

ปัญหาที่ 1 *เป็นไปได้หรือไม่ที่ตำแหน่งที่มีพื้นที่ซ้อนทับมากที่สุดของสามเหลี่ยมสองรูป* $\mathcal{A}$ *และ* $\mathcal{B}$ *จะมีความสัมพันธ์กับรูปสามเหลี่ยมที่ใหญ่ที่สุดที่แนบใน* $\mathcal{B}$ *กับ รูปสามเหลี่ยมที่เล็กที่สุดที่* $\mathcal{B}$ *แนบในได้*

ปัญหาที่ 2 *สำหรับกรณีที่เป็นรูปดาวจะมีกระบวนการสำหรับหาตำแหน่งที่ทำให้เกิดพื้นที่ซ้อนทับสูงสุดหรือไม่ และพื้นที่ที่ได้จะมากกว่าหรือน้อยกว่ากรณีที่มีด้านร่วมกัน*

ซึ่งสำหรับปัญหาข้อนี้คณะผู้ศึกษาได้ตั้งข้อคาดเดาเอาไว้ว่าพื้นที่ซ้อนทับที่มากที่สุดจะเกิดขึ้นเมื่อมีด้านร่วมกัน

ปัญหาที่ 3 *จะมีวิธีการสำหรับรูปสามเหลี่ยมที่มากกว่า 2 รูปหรือไม่*

ปัญหาที่ 4 *จะมีวิธีการสำหรับรูปหลายเหลี่ยมอื่นหรือไม่*

บรรณานุกรม

[1] Eric Plante. The Algorithm of convex polygons translation. Detecting Whether Two Convex Polygons Overlap. Retrieved 6 September, 2014 from http://www.iro.umontreal.ca/~plante/

[2] Fletcher. Detecting Whether Two Convex Polygons Overlap. Retrieved 7 October, 2014 from http://gamemath.com/2011/09/detecting-whether-two-convex-polygons-overlap/

[3] Hee-Kap Ahn, Peter Brassb, Chan-Su Shin. Maximum overlap and minimum convex hull of two convex polyhedral under translations. *Computational Geometry,* 40, Issue 2: 2008, 171–177.

[4] Mark de Berg, Olivier Devillers, Marc van Kreveld, Otfried Schwarzkopf, Monique Teillaud. Computing the Maximum Overlap of Two Convex Polygons Under Translations, *Lecture Notes in Computer Science,* 1178: 1996, 126-135.

[5] Zi-qiang Li, Yan He, Zhuo-jun Tian. Overlapping Area Computation between Irregular Polygons for Its Evolutionary Layout Based on Convex Decomposition, *Journal of Software,* 7, No 2: 2012, 485-492.

[6] ดำรง ทิพย์โยธา. (2551). คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 32 : โลกเรขาคณิต(พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 480 หน้า.

ประวัติผู้วิจัย

นายภูมิ เลิศภิญโญวงศ์ เกิดวันที่ 5 ธันวาคม พ.ศ. 2540 ที่เขต ตลิ่งชัน จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาระดับประถมศึกษาจากโรงเรียนราชวินิต กรุงเทพมหานคร ในปีการศึกษา 2552 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจากโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร ในปีการศึกษา 2555 และปัจจุบันศึกษาอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์

นายกฤตเมธ เล้งรักษา เกิดวันที่ 5 มิถุนายน พ.ศ. 2541 ที่อำเภอกระทุ่มแบน จังหวัดสมุทรสาคร สำเร็จการศึกษาระดับประถมศึกษาจากโรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร ในปีการศึกษา 2552 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจากโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร ในปีการศึกษา 2555 และปัจจุบันศึกษาอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์

นางสาว นวพรรณ วัฒนาวานิชกูล เกิดวันที่ 27 เมษายน พ.ศ. 2541 ที่อำเภอเมือง จังหวัดอุบลราชธานี สำเร็จการศึกษาระดับประถมศึกษาจากโรงเรียนอนุบาลอุบลราชธานี อุบลราชธานี ในปีการศึกษา 2552 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจากโรงเรียนเบ็ญจะมะมหาราช อุบลราชธานี ในปีการศึกษา 2555 และปัจจุบันศึกษาอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์